

**MOISÉS FERREIRA COSTA**

# **UMA PROPOSTA PARA COMPATIBILIZAÇÃO ENTRE REALIZAÇÕES DE REFERENCIAIS GEODÉSICOS**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Departamento de Geomática, Setor de Ciências da Terra da Universidade Federal do Paraná.

Orientador:

Prof. Dr. Marcelo Carvalho dos Santos

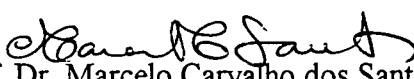
CURITIBA  
1999

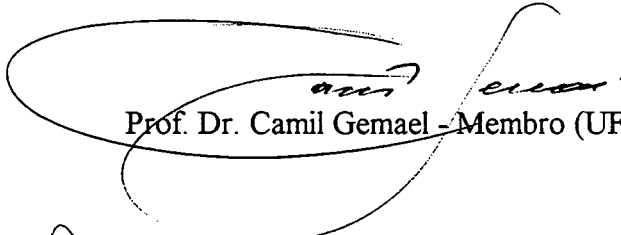
**“UMA PROPOSTA PARA COMPATIBILIZAÇÃO ENTRE  
REALIZAÇÕES DE REFERENCIAIS GEODÉSICOS”**

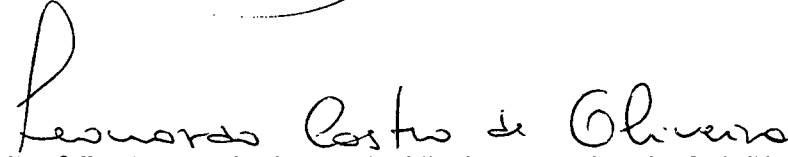
**POR**

**MOISÉS FERREIRA COSTA**

Dissertação nº 145 aprovada como requisito parcial do grau de Mestre no  
Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade  
Federal do Paraná, pela Comissão formada pelos professores:

  
Prof. Dr. Marcelo Carvalho dos Santos (UFPR)  
Orientador

  
Prof. Dr. Camil Gemael - Membro (UFPR)

  
Prof. Dr. Leonardo Castro de Oliveira - Membro (IME-RJ.)

“O que foi, é o que há de ser; e o  
que se fez, isso se tornará a fazer;  
nada há, pois, novo debaixo do sol”.  
Ec 1.9

## Agradecimentos

Uma dissertação de Mestrado só é concluída com êxito após longos anos de muito trabalho e intensa dedicação. Comigo não aconteceu diferente; foram anos de luta e de trabalho árduo que, em parte, estão materializados nestas páginas que vos coloco à disposição. Por outro lado, não é possível traduzir tanto empenho em um texto de algumas páginas, visto que, um trabalho como este, não pode ser visto como um fim em si mesmo, mas sim como a transição de uma nova fase.

Agradeço a Deus pelo dom da vida e pela oportunidade de realizar este trabalho. É Ele quem me tem dado coragem para enfrentar tarefas difíceis e guiado pelo caminho mais suave.

Quero também deixar registrado o apoio recebido para a realização deste trabalho, o qual não teria sido viabilizado sem a valiosa contribuição das pessoas / instituições, as quais agradeço:

- à minha família que, mesmo distante, soube compreender a minha ausência;
- ao meu amigo e orientador Prof. Dr. Marcelo Carvalho dos Santos pelas discussões relativas ao trabalho, pelas valiosas sugestões e pela amizade em todos estes anos de convívio;
- aos meus amigos Alexandre Borges Briones e Elaine Nunes Jordan (minha equipe) pela amizade e pela ajuda incondicional em todos os momentos;
- ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná pela oportunidade de realizar este curso de Mestrado;
- aos amigos e colegas do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas;
- à Mônica, secretária do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, pela disposição em nos atender sempre;
- a todos os professores do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas;
- ao IBGE pelo apoio na disponibilização dos dados para a realização dos ensaios contidos neste trabalho;
- ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro por meio de bolsa de Mestrado;
- e finalmente a todos que, de forma direta ou indireta, colaboraram para que este trabalho fosse menos árduo.

## Sumário

Lista de Figuras .....	viii
Lista de Quadros .....	ix
Lista de Gráficos .....	x
Lista de Abreviaturas e Siglas .....	xii
Lista de Símbolos .....	xiii
Resumo .....	xvii
Abstract .....	xviii
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA .....	1
1.2 CONTRIBUIÇÕES DA DISSERTAÇÃO .....	4
1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO .....	5
<b>2. REFERENCIAIS GEODÉSICOS TERRESTRES .....</b>	<b>6</b>
2.1 INTRODUÇÃO .....	6
2.2 O SISTEMA DE REFERÊNCIA TERRESTRE CONVENCIONAL .....	6
2.2.1 DEFINIÇÃO .....	7
2.2.2 REALIZAÇÕES DO CTRS .....	7
2.2.2.1 ITRF .....	8
2.2.2.2 WGS .....	8
2.3 SISTEMA GEODÉSICO BRASILEIRO .....	9
2.4 COORDENADAS GEODÉSICAS E COORDENADAS CARTESIANAS .....	10
2.5 RELACIONAMENTO ENTRE REFERENCIAIS GEODÉSICOS .....	14
2.6 EFEITO DA ONDULAÇÃO GEOIDAL .....	17

<b>3. PROPOSTA DE METODOLOGIA PARA COMPATIBILIZAÇÃO ENTRE</b>	
<b>REFERENCIAIS GEODÉSICOS .....</b>	<b>18</b>
3.1 INTRODUÇÃO .....	18
3.2 MODELO MATEMÁTICO DE TRANSFORMAÇÃO .....	19
3.3 AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES .....	23
3.3.1 AJUSTAMENTO PELO M.M.Q. ....	23
3.3.2 MÉTODO COMBINADO .....	27
3.3.3 MÉTODO PARAMÉTRICO .....	33
3.4 MODELAGEM DOS RESÍDUOS .....	38
3.4.1 FUNDAMENTO TEÓRICO .....	38
3.4.2 MODELOS POLINOMIAIS .....	41
3.5 RESUMO DAS OPERAÇÕES .....	43
 <b>4. IMPLMENTAÇÃO DA METODOLOGIA, ENSAIOS REALIZADOS E</b>	
<b>ANÁLISE DOS RESULTADOS .....</b>	<b>45</b>
4.1 INTRODUÇÃO .....	45
4.2 DESCRIÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO .....	46
4.3 OBTENÇÃO DAS ONDULAÇÕES GEOIDAIIS .....	48
4.4 ESCOLHA DOS PONTOS DE CONTROLE .....	49
4.5 DESENVOLVIMENTO DE ROTINAS .....	51
4.6 PROCESSAMENTO DOS DADOS .....	53
4.7 PRIMEIRO ENSAIO .....	55
4.7.1 DESCRIÇÃO DE PROCEDIMENTO .....	55
4.7.2 DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS .....	56
4.7.3 ESTIMATIVA DAS CORREÇÕES .....	58

4.7.4 EFEITO DA ONDULAÇÃO GEOIDAL .....	59
4.7.5 ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	60
4.7.5.1 ANÁLISE ESTATÍSTICA .....	60
4.7.5.2 RESÍDUOS DO AJUSTAMENTO DO PRIMEIRO ENSAIO ..	64
4.7.5.3 POSSÍVEIS ESTAÇÕES COM PROBLEMAS .....	65
4.7.5.4 ERROS ORIUNDOS DA PARAMETRIZAÇÃO .....	67
4.8 SEGUNDO ENSAIO .....	69
4.8.1 DESCRIÇÃO DE PROCEDIMENTO .....	69
4.8.2 DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS .....	70
4.8.3 ESTIMATIVA DAS CORREÇÕES .....	71
4.8.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	72
4.8.4.1 ANÁLISE ESTATÍSTICA .....	72
4.8.4.2 RESÍDUOS DO AJUSTAMENTO DO SEGUNDO ENSAIO ..	76
4.8.4.3 ERROS ORIUNDOS DA PARAMETRIZAÇÃO .....	77
<b>5. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>80</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>82</b>
I – Coordenadas geodésicas aproximadas dos pontos da área de estudo .....	83
II – Coordenadas geodésicas aproximadas dos pontos de controle .....	92
III – Gráficos de resíduos do ajustamento e erros da parametrização .....	94
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>100</b>

## Lista de Figuras

1.1 – Referencial cartesiano ortogonal .....	2
2.1 – Elipsóide de referência co-axial com referencial cartesiano .....	10
2.2 – Relação entre geóide e elipsóide .....	11
2.3 – Geometria da elipse .....	12
3.1 – Relação entre dois referenciais cartesianos tridimensionais.....	20
3.2 – Resíduos da transformação de similaridade .....	40
4.1 – Área de estudo com as estações do SGB .....	47
4.2 – Distribuição geográfica dos pontos de controle .....	49
4.3 – Situação geográfica dos pontos com resíduos altos .....	65



## Lista de Quadros

2.1 – Coordenadas de Chuá .....	9
2.2 – Parâmetros do SGB .....	9
4.1 – Limites geográficos das sub-áreas .....	50
4.2 – Estações utilizadas nos testes como pontos de controle .....	50
4.3 – Graus dos polinômios e número de coeficientes correspondentes .....	54
4.4 – Resultados da parametrização para o primeiro ensaio .....	56
4.5 – Matriz correlação do ajustamento para o primeiro ensaio .....	57
4.6 – Resultados da parametrização para cada teste do primeiro ensaio .....	57
4.7 – Resultados da parametrização do primeiro ensaio sem considerar a ondulação geoidal .....	58
4.8 – Diferenças entre as parametrizações do primeiro ensaio com a ondulação geoidal e sem a ondulação geoidal .....	59
4.9 – Estatística para o Quadro 4.4 .....	60
4.10 – Teste Qui-Quadrado para o primeiro ensaio .....	60
4.11 – Resultados da modelagem dos resíduos para o primeiro ensaio .....	63
4.12 – Estações com resíduos maiores que 3m em valor absoluto .....	66
4.13 – Resultados da parametrização para o segundo ensaio .....	70
4.14 – Matriz correlação do ajustamento para o segundo ensaio .....	70
4.15 – Resultados da parametrização para cada teste do segundo ensaio .....	71
4.16 – Estatística para o Quadro 4.13 .....	72
4.17 – Teste Qui-Quadrado para o segundo ensaio .....	72
4.18 – Resultados da modelagem dos resíduos para o segundo ensaio .....	75

## Lista de Gráficos

Gráfico 4.1 – Magnitude da ondulação geoidal N para área de estudo .....	48
Gráfico 4.2 – Limites de $\chi_t^2$ para o primeiro ensaio .....	61
Gráfico 4.3 – Desempenho obtido com a modelagem dos resíduos, cujas correções são estimadas por um polinômio de segundo grau – primeiro ensaio .....	62
Gráfico 4.4 – Desempenho obtido com a modelagem dos resíduos, cujas correções são estimadas por um polinômio de terceiro grau – primeiro ensaio.....	62
Gráfico 4.5 – Desempenho obtido com a modelagem dos resíduos, cujas correções são estimadas por um polinômio de quarto grau – primeiro ensaio .....	62
Gráfico 4.6 – Resíduos para as componentes X, Y e Z do primeiro ensaio .....	64
Gráfico 4.7 – Erro posicional resultante oriundo da metodologia clássica e da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de segundo grau – primeiro ensaio .....	67
Gráfico 4.8 – Erro posicional resultante oriundo da metodologia clássica e da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de terceiro grau – primeiro ensaio .....	68
Gráfico 4.9 – Erro posicional resultante oriundo da metodologia clássica e da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de quarto grau – primeiro ensaio .....	68
Gráfico 4.10 – Limites de $\chi_t^2$ para o segundo ensaio .....	73

Gráfico 4.11 – Desempenho obtido com a modelagem dos resíduos, cujas correções são estimadas por um polinômio de segundo grau	
– segundo ensaio .....	74
Gráfico 4.12 – Desempenho obtido com a modelagem dos resíduos, cujas correções são estimadas por um polinômio de terceiro grau	
– segundo ensaio .....	74
Gráfico 4.13 – Desempenho obtido com a modelagem dos resíduos, cujas correções são estimadas por um polinômio de quarto grau	
– segundo ensaio .....	74
Gráfico 4.14 – Resíduos para as componentes X, Y e Z do segundo ensaio .....	76
Gráfico 4.15 – Erro posicional resultante oriundo da metodologia clássica e da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de segundo grau – segundo ensaio .....	77
Gráfico 4.16 – Erro posicional resultante oriundo da metodologia clássica e da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de terceiro grau – segundo ensaio .....	78
Gráfico 4.17 – Erro posicional resultante oriundo da metodologia clássica e da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de quarto grau – segundo ensaio .....	78

## Lista de Abreviaturas e Siglas

BIH – Bureau International de L’Heure  
BTS – BIH Terrestrial System  
CTRS – Conventional Terrestrial Reference System  
DoD – Department of Defense  
GPS – Global Positioning System  
IBGE – Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística  
IERS – International Earth Rotation Service  
ITRF – IERS Terrestrial Reference Frame  
ITRS – IERS Terrestrial Reference System  
LLR – Lunar Laser Ranging  
MAPGEO – MAPa GEOidal do Brasil de 1992  
MATLAB – MATrix LABoratory  
MMQ – Método dos Mínimos Quadrados  
MVC – Matriz Variância Covariância  
NAD-27 – North American Datum of 1927  
NAD-83 – North American Datum of 1983  
NIMA – National Imagery and Mapping Agency  
SAD-69 – South American Datum of 1969  
SGB – Sistema Geodésico Brasileiro  
SLR – Satellite Laser Ranging  
VLBI – Very Long Baseline Interferometry  
WGS – World Geodetic System  
WGS-60 – World Geodetic System of 1960  
WGS-66 – World Geodetic System of 1966  
WGS-72 – World Geodetic System of 1972  
WGS-84 – World Geodetic System of 1984

## Lista de Símbolos

- $A$  – Matriz das derivadas parciais das funções com relação aos parâmetros;
- $A_i$  – Sub-matriz  $A_i$  das derivadas parciais para um ponto genérico  $P_i$ ;
- $a$  – Semi-eixo maior do elipsóide;
- $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$  – Coeficientes das funções polinomiais;
- $B$  – Matriz das derivadas parciais das funções com relação às observações;
- $B_i$  – Sub-matriz  $B_i$  das derivadas parciais para um ponto genérico  $P_i$ ;
- $b$  – Semi-eixo menor do elipsóide;
- $C$  – Matriz correlação;
- $E$  – Resultante do erro obtido para as componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$ ;
- $e$  – Primeira excentricidade do elipsóide;
- $e'$  – Segunda excentricidade do elipsóide;
- $e_x$  – Erro obtido para a coordenada  $x$ ;
- $e_y$  – Erro obtido para a coordenada  $y$ ;
- $e_z$  – Erro obtido para a coordenada  $z$ ;
- $f$  – Achatamento do elipsóide;
- $H$  – Altitude ortométrica;
- $h$  – Altura elipsóidica;
- $H_0$  – Hipótese básica;
- $H_1$  – Hipótese alternativa;
- $K$  – Vetor de multiplicadores de Lagrange;
- $L$  – Vetor resultante da diferença entre  $L_0$  e  $L_b$ ;
- $L_a$  – Vetor das observações ajustadas;
- $L_b$  – Vetor das observações brutas;

$L_0$  – Vetor calculado à partir dos de  $X_0$  e  $L_b$ ;  
 $M$  – Matriz auxiliar do método combinado;  
 $m$  – Número de observações ou erro médio quadrático;  
 $N$  – Matriz dos coeficientes das equações normais ou;  
 $N$  – Ondulação geoidal;  
 $\bar{N}$  – Raio de curvatura da seção primeiro vertical (grande normal);  
 $N_0$  – Ondulação geoidal no vértice Chuá;  
 $n$  – Número de pontos;  
 $o_1$  – Origem do referencial cartesiano  $(x, y, z)$ ;  
 $o_2$  – Origem do referencial cartesiano  $(X, Y, Z)$ ;  
 $P$  – Matriz peso das observações;  
 $p$  – Raio do paralelo de latitude  $\varphi$ ;  
 $P_i$  – Ponto qualquer no terreno;  
 $p_i$  – Peso da  $i$ -ésima observação;  
 $\text{ppm}$  – Partes por milhão (significa uma parte em um milhão de partes);  
 $\text{ppb}$  – Partes por bilhão (significa uma parte em um bilhão de partes);  
 $R_1(\varepsilon_x)$  – Matriz de rotação ortogonal, aplicada ao eixo primário  $X$ ;  
 $R_2(\varepsilon_y)$  – Matriz de rotação ortogonal, aplicada ao eixo secundário  $Y$ ;  
 $R_3(\varepsilon_z)$  – Matriz de rotação ortogonal, aplicada ao eixo terciário  $Z$ ;  
 $R_\varepsilon$  – Matriz de rotação ortogonal resultante do produto de  $R_1(\varepsilon_z)$ ,  $R_2(\varepsilon_y)$  e  $R_3(\varepsilon_x)$ ;  
 $r$  – Número de equações para o método combinado;  
 $r_i$  – Vetor posição do ponto  $P_i$  no referencial cartesiano  $(x, y, z)$ ;  
 $r_0$  – Vetor translação;  
 $S$  – Graus de liberdade;  
 $t_i$  – Funções polinomiais de grau  $k$ ;

$U$  – Vetor dos termos independentes das equações normais;

$u$  – Número de parâmetros ou ângulo auxiliar,

$V$  – Vetor dos resíduos;

$V_x$  – Resíduo para a coordenada  $x$ ;

$V_y$  – Resíduo para a coordenada  $y$ ;

$V_z$  – Resíduo para a coordenada  $z$ ;

$W$  – Vetor erro de fechamento;

$W_i$  – Sub-vetor erro de fechamento;

$X$  – Vetor das correções aos parâmetros aproximados ,

$X_a$  – Vetor dos parâmetros ajustados;

$X_0$  – Vetor dos parâmetros aproximados;

$X_i$  – Componente cartesiana ao longo do eixo  $X$ ;

$x_0$  – Translação primária ao longo do eixo  $X$ ;

$x_i$  – Componente cartesiana ao longo do eixo  $x$ ;

$Y_i$  – Componente cartesiana ao longo do eixo  $Y$ ;

$y_i$  – Componente cartesiana ao longo do eixo  $y$ ;

$y_0$  – Translação secundária ao longo do eixo  $Y$ ;

$Z_i$  – Componente cartesiana ao longo do eixo  $Z$ ;

$z_i$  – Componente cartesiana ao longo do eixo  $z$ ;

$z_0$  – Translação terciária ao longo do eixo  $Z$ ;

$\alpha$  – Nível de significância;

$\Delta X$  – Variação na coordenada  $X$ ;

$\Delta Y$  – Variação na coordenada  $Y$ ;

$\Delta Z$  – Variação na coordenada  $Z$ ;

$\delta$  – Diferença de escala;

$\varepsilon_x$  – Ângulo de rotação em torno do eixo X;  
 $\varepsilon_y$  – Ângulo de rotação em torno do eixo Y;  
 $\varepsilon_z$  – Ângulo de rotação em torno do eixo Z;  
 $\varepsilon$  – Excentricidade linear;  
 $\eta$  – Componente primeiro vertical do desvio da vertical;  
 $\Phi$  – Forma Quadrática Fundamental;  
 $\varphi$  – Latitude geodésica;  
 $\kappa$  – Fator de escala;  
 $\lambda$  – Longitude geodésica;  
 $\xi$  – Componente meridiana do desvio da vertical;  
 $\chi^2$  – Distribuição Qui-Quadrado;  
 $\chi_c^2$  – Qui-quadrado calculado, baseado na forma quadrática dos resíduos;  
 $\chi_t^2$  – Qui-quadrado teórico, baseado na distribuição  $\chi^2$ ;  
 $\rho_{ij}$  – Coeficiente de correlação linear;  
 $\rho_i$  – Vetor posição do ponto  $P_i$  no referencial cartesiano (X, Y, Z);  
 $\sigma_{ij}$  – Covariância entre i e j;  
 $\sigma_i^2$  – Variância da i-ésima observação;  
 $\sigma_0^2$  – Variância da observação de peso unitário a priori;  
 $\hat{\sigma}_0^2$  – Variância da observação de peso unitário a posteriori;  
 $\Sigma_{L_0}$  – Matriz covariância das observações;  
 $\Sigma_{x_s}$  – Matriz covariância dos parâmetros ajustados;



## Resumo

Os referenciais geodésicos materializados mediante procedimentos clássicos são afetados por distorções sistemáticas que não tem sido apropriadamente modeladas. Por outro lado, as aplicações nas chamadas Ciências Geodésicas, tem exigido precisões cada vez mais crescentes. Atualmente, o Sistema de Posicionamento Global – GPS – permite o posicionamento tridimensional em um referencial geocêntrico. Além disso, oferece um nível de precisão muito superior ao fornecido pelos procedimentos clássicos. Uma compatibilização entre as realizações de tais referenciais, só pode ser considerada satisfatória se as distorções inerentes àquelas materializações forem contempladas. Para isto, uma simples transformação geométrica pode não ser apropriada, por ela não conter parâmetros suficientes para estabelecer um relacionamento definitivo. No presente trabalho, propõe-se uma metodologia que vai além do procedimento clássico. Nela, utiliza-se uma transformação de similaridade no espaço tridimensional, associada ao conceito de modelagem dos resíduos, de maneira que as distorções são modeladas no processo de compatibilização. Para estimativa dos parâmetros, o Método dos Mínimos Quadrados é utilizado. Polinômios de graus 2, 3 e 4 foram testados na modelagem dos resíduos e, para validação da metodologia, uma área foi selecionada. Os resultados mostram a melhoria introduzida pela modelagem dos resíduos, que chegou a diminuir o erro obtido em 84,4% dos casos para um polinômio de quarto grau.

## Abstract

Geodetic references when materialized through classic procedures are affected by systematic distortions which have not been conveniently modeled. On the other hand, geodetic applications require more and more accurate measurements. Nowadays, the Global Positioning System – GPS – provides three-dimensional positioning on a geocentric reference, besides a precision level more accurate than the ones given by classic methods. The compatibility between the materializations of such references can only be considered as satisfactory after the systematic distortions are taken into account. A simple geometric transformation may not be suitable for this task, because this transformation does not have enough parameters to establish a definitive relationship between the references. A methodology which goes beyond the classic method is presented. This methodology uses a similarity transformation in the 3D space associated to the concept of residual modeling, so that the distortions are modeled in the transformation process. The method of least squares is applied for parameters estimation. Polynomial functions of 2<sup>nd</sup>, 3<sup>rd</sup> and 4<sup>th</sup> degrees were tested in the residual modeling in a selected area. The results show an improvement provided by the residual modeling which decrease the error in 84.4% of the cases when a 4<sup>th</sup> degree polynomial function is used.

## 1. INTRODUÇÃO

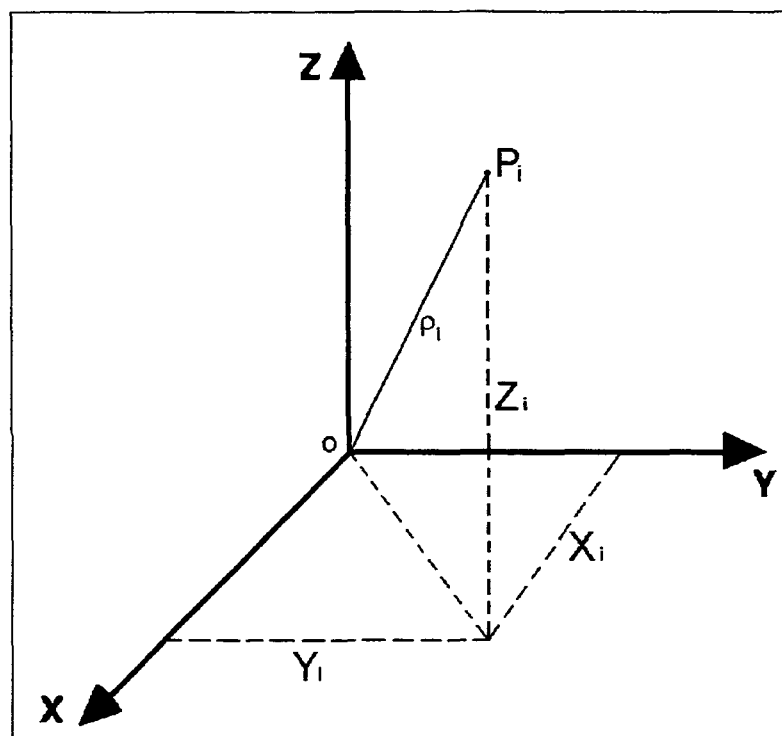
### 1.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

A análise de um fenômeno natural é usualmente conduzida pela introdução de uma aproximação, isto é, recorrendo-se a um chamado modelo de referência (GRAFAREND et al., 1979, p. 179). Logicamente, o modelo de referência é uma maneira conveniente, o que facilita sobremaneira a análise do fenômeno estudado. É claro que o grau de dificuldade desta análise, depende da complexidade do fenômeno e do modelo matemático escolhido para descrevê-lo.

Quando se deseja estudar as posições relativas de pontos ou objetos na superfície física da Terra é necessário a introdução de um sistema de referência. Desta maneira, as posições de pontos ou objetos nesta superfície devem estar atreladas a um referencial. Esta operação é possível após admitir algumas simplificações, pois a forma real da Terra não é perfeitamente conhecida. Neste trabalho, o estudo dos referenciais é uma etapa indispensável, pois constitui um pré-requisito para que se possa atingir o objetivo principal, qual seja, o relacionamento funcional entre os chamados referenciais geodésicos.

Um referencial pode ser definido ou arbitrado, porém ambos devem ser realizados para uso prático (ANDRADE, 1984, p. 21) e, para estabelecê-lo, é necessário definir sua origem, orientação dos eixos e sua polaridade (SANTOS, 1997, p. 18). Quanto à polaridade, os referenciais podem ser dextrógiros (mão-direita) ou levógiros (mão-esquerda). A Figura 1.1 mostra um referencial cartesiano tridimensional com polaridade dextrógira, onde sua origem é o ponto “o”, cujas componentes do ponto  $P_i$  são dadas por  $(X_i, Y_i, Z_i)$ .

Figura 1.1 – Referencial cartesiano ortogonal



Para a solução do problema básico da geodésia, que consiste em determinar posições de pontos sobre a superfície física da Terra, diversos referenciais foram definidos. Ao arcabouço de pontos posicionados nesta superfície dá-se o nome de malhas ou redes geodésicas, as quais constituem instrumentos de materialização dos referenciais geodésicos. No entanto, para propósitos práticos, é necessário que os diversos referenciais possam se relacionar mediante alguma equação de transformação.

Um dos problemas fundamentais com as redes geodésicas clássicas é o acúmulo de erros sistemáticos. Redes implantadas com o uso de técnicas espaciais não são particularmente susceptíveis a este tipo de problema (THOMSON, 1976, p. 29). De acordo com VANÍCEK e STEEVES (1996, p. 742), as redes horizontais são afetadas por uma combinação de erros aleatórios (estimados no processo de ajustamento) e sistemáticos (mais perigoso e mais difícil de lidar).

O Sistema de Posicionamento Global (GPS) tem sido utilizado como uma informação adicional no reajustamento de redes geodésicas clássicas. Uma grande vantagem é a minimização das distorções devido a introdução de observações de natureza espacial. Alguns trabalhos pertinentes são: LEICK (1993); JUNKINS e ERICKSON (1996) e IBGE (1996).

Diversos modelos tem sido desenvolvidos com a finalidade de descrever o relacionamento entre dois referenciais. THOMSON (1976, cap. 7) apresenta alguns modelos usados na combinação de redes geodésicas, destacando como principais os modelos de Bursa, Molodensky e Veis, que contém um máximo de sete parâmetros de transformação. Estes modelos são matematicamente equivalentes (GEMAEL, 1991, p. 12.16) e fornecem resultados idênticos para as rotações e escala (VANÍCEK & KRAKIWSKY, 1986, p. 394). No entanto, todos os três modelos são inadequados, porque eles não contém parâmetros suficientes para descrever o relacionamento entre dois referenciais (THOMSON, 1976, p. 103a).

Na metodologia clássica, apenas uma transformação geométrica é utilizada, não permitindo uma modelagem apropriada das distorções sistemáticas. Devido a isto, neste trabalho, apresenta-se uma metodologia que vai além do procedimento clássico. Nela, utiliza-se uma transformação de similaridade no espaço tridimensional, associada com a modelagem dos resíduos, de maneira que as distorções sejam contempladas no processo de compatibilização.

## 1.2 CONTRIBUIÇÕES DA DISSERTAÇÃO

Nesta seção, as contribuições desta dissertação são apresentadas. Procurou-se enfatizar aquelas que se julgou de maior importância no contexto deste trabalho.

A contribuição de maior relevância desta dissertação trata do problema do relacionamento entre dois referenciais quando as distorções não são modeladas. Com este propósito, propõe-se uma metodologia que, além de uma transformação geométrica, inclui o conceito de modelagem dos resíduos. Também destaca-se o desenvolvimento de rotinas computacionais cujos códigos, escritos em ambiente MATLAB, possibilitaram a implementação da metodologia e o seu teste, por meio do processamento de dados de uma área envolvendo todo o estado do Paraná. Este processamento permitiu a geração de parâmetros de transformação entre a “antiga” e a “nova” realização do SGB, juntamente com a modelagem da superfície residual, parâmetros estes que podem ser de grande utilidade à pessoas e/ou instituições que venham a utilizar produtos derivados de alguma transformação envolvendo as referidas realizações. Este trabalho pode ser considerado também como contribuição à literatura dedicada ao assunto, principalmente de origem nacional, que é bastante escassa.

### 1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta dissertação está estruturada em cinco capítulos, cujas divisões menores são as seções, sendo estas compostas por itens. O tema foi encadeado dentro desta estrutura de uma maneira que se julgou satisfatória para organização do assunto.

O capítulo 2 é dedicado ao estudo dos referenciais geodésicos, com um enfoque maior no tema central da dissertação, qual seja, o relacionamento entre estes referenciais, onde são descritas algumas experiências realizadas no Brasil.

Os capítulos 3 e 4 descrevem, respectivamente, a metodologia proposta e sua implementação, os quais são, certamente, os mais importantes no contexto deste trabalho. O capítulo 3 apresenta a metodologia proposta, onde cada etapa é descrita numa seção. Ele descreve o modelo matemático de transformação, focalizando aplicação do Método dos Mínimos Quadrados no processo de estimativa dos parâmetros. Introduz o conceito de modelagem dos resíduos, onde atenção especial é dada aos modelos polinomiais e, finalmente, mostra um resumo da metodologia proposta. O capítulo 4, por sua vez, é responsável pela parte prática do trabalho. Nele, a metodologia desenvolvida no capítulo 3 é implementada e testada. Para isto, uma área de estudo é escolhida e dois ensaios são realizados. Também, as análises dos resultados são feitas e apresentadas.

O capítulo 5 é um fechamento do trabalho, onde são apresentadas as conclusões e as recomendações para futuros trabalhos.

## 2. REFERENCIAIS GEODÉSICOS TERRESTRES

### 2.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo é dedicado ao estudo dos referenciais geodésicos. Na seção 2.2 apresenta-se, de forma sucinta, a definição e as principais realizações do Sistema de Referência Terrestre Convencional (CTRS). O Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) é apresentado na seção 2.3. A seção 2.4 mostra as transformações comuns entre as coordenadas geodésicas e suas correspondentes coordenadas cartesianas e vice-versa.

A seção 2.5 se preocupa com o tema central, qual seja, o problema do relacionamento entre dois referenciais e descreve algumas experiências realizadas no Brasil. Também é mostrado o efeito da ondulação geoidal nas coordenadas cartesianas e, conseqüentemente, no processo de estimativa dos parâmetros de transformação.

### 2.2 O SISTEMA DE REFERÊNCIA TERRESTRE CONVENCIONAL

Um sistema geocêntrico terrestre é, por definição, aquele cuja origem (0, 0, 0) coincide com o centro de massa da Terra e cujos eixos são solidários com ela (VANÍCEK e STEEVES, 1996, p. 740). O sistema geocêntrico terrestre mais comum usado em geodésia é o Sistema de Referência Terrestre Convencional (CTRS).

Nesta seção, apenas uma visão geral é dada. O leitor interessado em maiores detalhes é remetido à GRAFAREND et al. (1979); MUELLER (1985); VANÍCEK e KRAKIWSKY (1986, cap. 15).



### 2.2.1 DEFINIÇÃO

Um CTRS é definido como (IERS, 1996):

- é geocêntrico, com o centro de massa sendo definido para toda a Terra, incluindo oceanos e atmosfera;
- sua escala é aquela definida pelo arcabouço “frame” terrestre local, dentro do conceito da teoria relativística da gravitação;
- sua orientação foi inicialmente dada pelo Sistema Terrestre do BIH (BTS) para a época 1984.0;
- a evolução temporal de sua orientação não deve permitir rotação global residual com relação à crosta terrestre.

### 2.2.2 REALIZAÇÕES DO CTRS

Segundo MUELLER (1985) é necessário fazer uma distinção entre a definição de um sistema de coordenadas e a realização prática do seu arcabouço “frame” de referência.

Um CTRS pode ser realizado por meio de um arcabouço de referência, isto é, um conjunto de coordenadas de estações para uma rede que são especificadas pelas coordenadas cartesianas (X, Y, Z) por preferência ou se as coordenadas geográficas são necessárias, o elipsóide GRS 80 é recomendado (IERS, 1996).

### 2.2.2.1 ITRF

Por ser monitorado pelo Serviço Internacional de Rotação da Terra (IERS), o CTRS é chamado de ITRS, cujas realizações são produzidas anualmente pelo IERS sob a sigla ITRF, compostas de uma lista consistente de coordenadas e velocidades para um conjunto de estações do IERS (IERS, 1996).

O arcabouço “frame” de referência é derivado à partir das técnicas mais precisas da Geodésia Espacial que são o VLBI, SLR, LLR e GPS (SILLARD e BOUCHER, 1996). A origem do ITRF é locada no centro de massa da Terra com uma incerteza de 10 cm (LEICK, 1995).

### 2.2.2.2 WGS

O Sistema Geodésico Mundial (WGS) surgiu da necessidade de se dispor de um sistema de caráter global. O primeiro da série dos WGS começou com o WGS-60 e, com a incorporação de mais dados, melhores técnicas computacionais e melhor conhecimento da Terra, foi seguido pelo WGS-66, WGS-72 e o mais recente WGS-84.

O WGS-84 é um CTRS (NIMA, 1997), cuja realização do seu arcabouço de referência é por posicionamento preciso com o GPS em estações do Departamento de Defesa (DoD) (WOODEN e SMITH, 1995).

Desde que foi declarado oficial em 1987, o WGS-84 passou por dois refinamentos, sendo o primeiro em 2/janeiro/94 e o segundo em 29/setembro/96. O primeiro refinamento apresentou uma acurácia absoluta de 10 cm em relação ao ITRF92 e o segundo de 5 cm em relação ao ITRF94 (NIMA,

1997). Deste modo, para a maioria das aplicações práticas, o WGS-84 e o ITRF podem ser considerados coincidentes (MALYS e SLATER, 1995).

### 2.3 SISTEMA GEODÉSICO BRASILEIRO

Esta seção apresenta o SGB. Busca-se introduzir, de maneira sucinta, somente informações relevantes no contexto deste trabalho.

O SGB tem como ponto origem o vértice Chuá, localizado em Minas Gerais, e apresenta as seguintes coordenadas:

Quadro 2.1 – Coordenadas de Chuá

Coordenadas	Astronômicas	Geodésicas
Latitude (S)	$19^{\circ} 45' 41.34'' \pm 0.05''$	$19^{\circ} 45' 41.6527''$
Longitude (W)	$48^{\circ} 06' 07.80'' \pm 0.08''$	$48^{\circ} 06' 04,0639''$

Fonte: GEMAEL, 1991

Os parâmetros definidores do sistema são:

Quadro 2.2 – Parâmetros do SGB

Parâmetros	Valores
$a$	6378160 m
$1/f$	298.25
$\xi$	$-0.31''$
$\eta$	$3.59''$
$N_0$	0 m

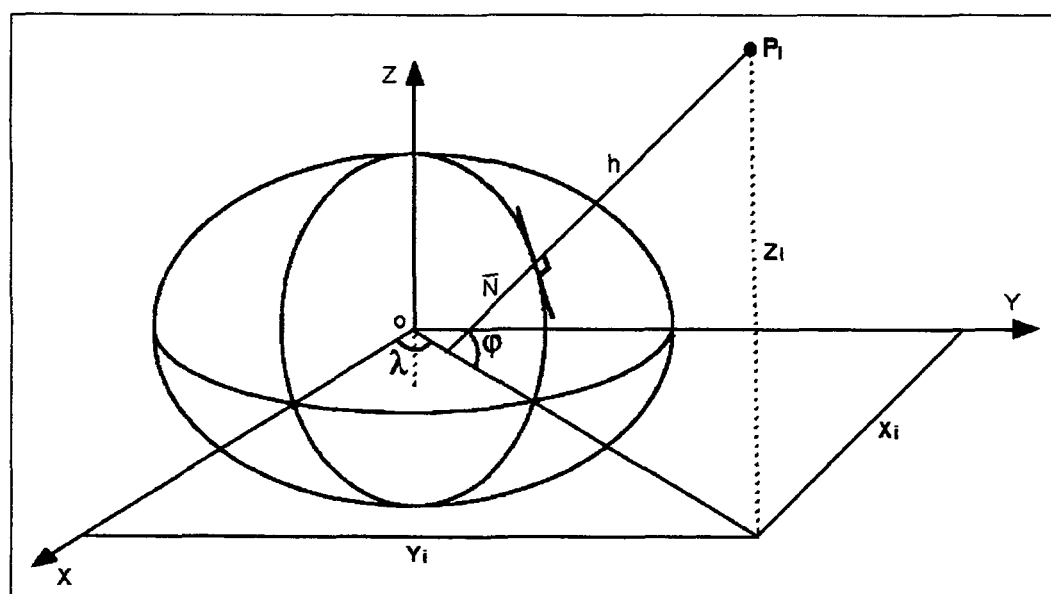
Fonte: GEMAEL, 1991

Após o reajustamento da rede planimétrica do SGB, concluído em 1996, gerou-se novos valores de coordenadas para 4939 vértices, os quais são responsáveis pela última realização do Sistema Geodésico Brasileiro (IBGE, 1996). Para efeito desta pesquisa, designou-se a realização anterior a 1996 de “antiga” realização e a última de “nova” realização.

## 2.4 COORDENADAS GEODÉSICAS E COORDENADAS CARTESIANAS

As posições de pontos atreladas a um referencial podem ser dadas tanto em coordenadas cartesianas tridimensionais ( $X, Y, Z$ ) como em coordenadas geodésicas ( $\varphi, \lambda, h$ ), isto é, latitude, longitude e altitude geométrica. Entretanto, de acordo com VANÍCEK e STEEVES (1996, p. 740), o uso de coordenadas geodésicas requer a introdução de um elipsóide de referência co-axial com o referencial cartesiano. A Figura 2.1 mostra as coordenadas geodésicas e cartesianas para um ponto genérico  $P_i$ .

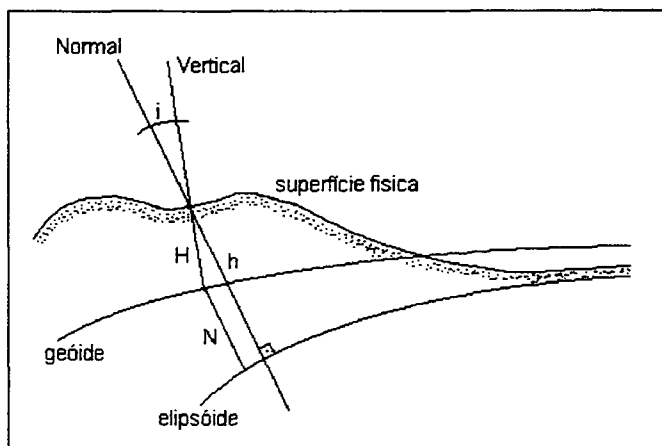
Figura 2.1 – Elipsóide de referência co-axial com referencial cartesiano



Fonte: adaptado de LEICK (1995, p. 224)

A altitude geodésica ou elipsoidal ( $h$ ) é uma quantidade puramente geométrica. Porém, nas aplicações práticas, a altitude requerida é aquela com significado físico e, portanto, referida ao geóide. Segundo TORGE (1980, p. 44), o geóide pode ser definido como a superfície equipotencial que melhor se ajusta ao nível médio não perturbado dos mares. A Figura 2.2 mostra o relacionamento entre o geóide e o elipsóide.

Figura 2.2 – Relação entre geóide e elipsóide



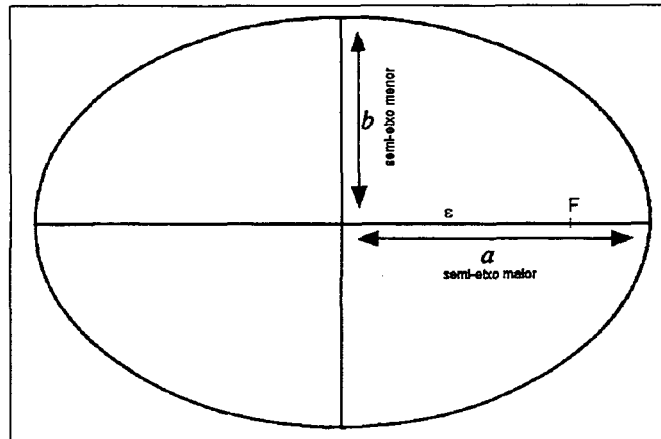
A altitude elipsoidal ( $h$ ) é a distância entre a superfície física e a superfície do elipsóide, contada ao longo da normal. A altitude ortométrica ( $H$ ) é contada ao longo da vertical e corresponde a distância entre a superfície física e a superfície do geóide, como mostra a Figura 2.2. O relacionamento entre o elipsóide e o geóide é obtido pela ondulação geoidal ( $N$ ) também mostrada na Figura 2.2. Segundo GEMAEL (1991, p. 1.3), o nivelamento geométrico associado à gravimetria nos fornece uma aproximação para altitude ortométrica ( $H$ ).

Estas três grandezas, isto é, a altitude elipsoidal ( $h$ ), a altitude ortométrica ( $H$ ) e a ondulação geoidal ( $N$ ), podem ser relacionadas aproximadamente por (SIDERIS, 1993, p. 94 e RAPP, 1994, p. 27):

$$h \cong H + N. \quad (2.1)$$

Um elipsóide de revolução é criado pela rotação de uma elipse meridiana em torno do seu eixo menor. A Figura 2.3 mostra a geometria da elipse. Usualmente, um elipsóide biaxial é definido pelo semi-eixo maior ( $a$ ) e achatamento ( $f$ ) (MUELLER, 1974, p. 514).

Figura 2.3 – Geometria da elipse



O achatamento ( $f$ ) e a excentricidade linear ( $\varepsilon$ ) são dados por (TORGE, 1980, p. 48):

$$f = \frac{a - b}{a}; \quad (2.2)$$

$$\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (2.3)$$

As excentricidades primeira e segunda são dadas, respectivamente, por (MORITZ, 1980):

$$e = \frac{\varepsilon}{a} \therefore e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad (2.4)$$

$$e' = \frac{\varepsilon}{b} \therefore e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \quad (2.5)$$

com:

$a$  – semi-eixo maior do elipsóide de revolução;

$b$  – semi-eixo menor do elipsóide de revolução.

Após pequenas manipulações nas equações (2.2) e (2.4), é possível relacionar o achatamento ( $f$ ) com a primeira excentricidade ( $e$ ) por:

$$e^2 = 2.f - f^2. \quad (2.6)$$

O raio de curvatura da seção primeiro vertical ou grande normal ( $\bar{N}$ ) mostrado na Figura 2.1 é dado por (PAUL, 1973, p. 135):

$$\bar{N} = \frac{a}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi))^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.7)$$

As coordenadas geodésicas ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ) podem ser transformadas em suas correspondentes coordenadas cartesianas ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) mediante a seguinte equação de transformação (VINCENY, 1965, p. 129):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{N} + h) \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda) \\ (\bar{N} + h) \cos(\varphi) \cdot \text{sen}(\lambda) \\ (\bar{N} \cdot (1 - e^2) + h) \text{sen}(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

A transformação inversa à indicada na equação (2.8), pode se apresentar tanto na forma direta quanto na iterativa. Uma solução baseada em fórmula direta é apresentada por PAUL (1973) e VANÍCEK & KRAKIWSKY (1986, p. 326) usando uma equação algébrica do quarto grau. TORGE (1980, p. 52) apresenta fórmulas iterativas para a latitude ( $\varphi$ ) e para a altitude elipsoidal ( $h$ ).

A solução mostrada neste trabalho é baseada em fórmula direta (BOWRING, 1976; VINCENY e BOWRING, 1978). Ela é dada por:

$$p = \sqrt{(X^2 + Y^2)}; \quad (2.9)$$

$$\varphi = \arctan \left[ \frac{Z + e'^2 \cdot b \cdot \text{sen}^3(u)}{p - e^2 \cdot a \cdot \cos^3(u)} \right]; \quad (2.10)$$

$$\lambda = \arctan \left( \frac{Y}{X} \right); \quad (2.11)$$

$$h = \frac{p}{\cos(\varphi)} - \bar{N}, \quad (2.12)$$

onde:

$$\text{sen}(u) = \frac{\tan(u)}{\left(1 + \tan^2(u)\right)^{\frac{1}{2}}}; \quad (2.13)$$

$$\cos(u) = \frac{1}{\left(1 + \tan^2(u)\right)^{\frac{1}{2}}}; \quad (2.14)$$

$$\tan(u) = \left(\frac{Z}{p}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right). \quad (2.15)$$

Para aplicação das fórmulas (2.9) a (2.15), a seguinte seqüência é sugerida:

- Calcular o valor de p (raio do paralelo de latitude ( $\varphi$ )) pela equação (2.9);
- Calcular o valor de  $\tan(u)$  pela equação (2.15);
- Calcular os valores de  $\text{sen}(u)$  e  $\cos(u)$ , respectivamente pelas equações (2.13) e (2.14);
- Calcular o valor da latitude ( $\varphi$ ) pela equação (2.10);
- Calcular o valor da longitude ( $\lambda$ ) pela equação (2.11);
- Calcular o valor da altutude elipsóidica (h) pela equação (2.12);

Finalmente, basta apenas uma análise do quadrante para a longitude ( $\lambda$ ) na equação (2.11). O valor de  $\bar{N}$  na equação (2.12) vem da equação (2.7).

## 2.5 RELACIONAMENTO ENTRE REFERENCIAIS GEODÉSICOS

O problema do relacionamento entre dois referenciais já foi apresentado no capítulo 1. Nesta seção, apresenta-se de maneira sucinta algumas experiências realizadas no Brasil.

Com o objetivo de determinar parâmetros de transformação entre o WGS-72 e o SAD-69, ABIB (1978) utilizou treze pontos da rede geodésica brasileira com coordenadas comuns em ambos os referenciais. Esta experiência foi realizada utilizando-se quatro diferentes graus de parametrização, a saber:



1 – três parâmetros (3 translações):  $x_0, y_0, z_0$ ;

2 – quatro parâmetros (3 translações e 1 escala):  $x_0, y_0, z_0, k$ ;

3 – seis parâmetros (3 translações e 3 rotações):  $x_0, y_0, z_0, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ;

4 – sete parâmetros (3 translações, 3 rotações e 1 escala):  $x_0, y_0, z_0, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, k$ ,

sendo o melhor resultado, aquele obtido com o modelo de sete parâmetros.

Também com o mesmo objetivo, KADLEC e GOMES (1978) realizaram outra experiência utilizando uma quantidade maior de pontos, isto é, vinte vértices da triangulação brasileira. Nesta experiência, foi utilizado apenas o modelo de três parâmetros (3 translações).

Um modelo para a determinação simultânea de parâmetros de transformação e de ondulações geoidais é apresentado por ANDRADE (1984). Para experiência, utilizou-se 21 pontos com coordenadas comuns no WGS-72 e SAD-69, com os quais determinou-se os três parâmetros (3 translações) e as ondulações geoidais em SAD-69.

Em experiências realizadas por CASTAÑEDA (1986) observa-se uma quantidade ainda maior de pontos comuns referidas ao WGS-72 e SAD-69, chegando a atingir 104 pontos em alguns casos. Nesta experiência, além de determinar parâmetros de transformação entre estes referenciais, foi detectado um erro de orientação na definição do SAD-69.

Os parâmetros de transformação oficiais, divulgados pelo IBGE, entre o WGS-84 e o SAD-69 são apenas três translações ( $x_0, y_0, z_0$ ), determinados sobre o vértice Chuá. Em FORTES et al. (1989) encontra-se a metodologia utilizada para determinação destes parâmetros, cujos valores são:

$$\begin{aligned}x_0 &= +66.87 \pm 0.43 \text{ m;} \\y_0 &= -04.37 \pm 0.44 \text{ m;} \\z_0 &= +38.52 \pm 0.40 \text{ m,}\end{aligned}$$

de maneira que as coordenadas cartesianas tridimensionais referidas ao WGS-84, podem ser transformadas em SAD-69 por:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{SAD}} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{WGS}} + \begin{bmatrix} +66.87 \\ -04.37 \\ +38.52 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Uma alternativa visando diminuir o erro obtido em coordenadas referidas ao SAD-69 quando os parâmetros acima descritos são aplicados à coordenadas referidas ao WGS-84 é apresentada por VERONEZ (1998), o qual advoga o uso de parâmetros regionais. A experiência foi realizada utilizando-se seis pontos, cujas coordenadas são conhecidas no WGS-84 e SAD-69, os quais estão localizados no município de São Carlos – SP. Dois diferentes graus de parametrização foram testados, isto é, os modelos de sete  $(x_0, y_0, z_0, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, k)$  e três  $(x_0, y_0, z_0)$  parâmetros. Para o modelo de três parâmetros  $(x_0, y_0, z_0)$ , foi possível comparar a diferença de coordenadas obtidas quando são aplicados os parâmetros estimados nesta experiência e a diferença de coordenadas obtidas quando são aplicados os parâmetros divulgados pelo IBGE.

O SGB experimentou uma nova realização com o reajustamento simultâneo de toda a rede geodésica brasileira (IBGE, 1996). Com o objetivo de compatibilizar esta nova realização com a realização anterior, OLIVEIRA et al. (1997) e OLIVEIRA (1998) apresentam uma análise onde, além de determinar parâmetros de transformação, é feita uma modelagem das distorções. Para isto, é utilizada a transformação geométrica afim geral a doze parâmetros, combinada com a Triangulação de Delaunay.

## 2.6 EFEITO DA ONDULAÇÃO GEOIDAL

Quando a ondulação geoidal ( $N$ ) não é considerada na transformação de coordenadas geodésicas ( $\phi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ) em suas correspondentes coordenadas cartesianas ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ), um erro é cometido. Este erro expressa uma variação nas coordenadas cartesianas tridimensionais. Um estudo sobre a influência da ondulação geoidal ( $N$ ) na transformação de coordenadas é apresentado por ABD-ELMOTAAL e EL-TOKHEY (1997).

Esta variação ( $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ ) nas coordenadas cartesianas tridimensionais ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) pode ser obtida pela manipulação algébrica das equações (2.1) e (2.8). Primeiro, considere as coordenadas cartesianas sendo obtidas pela equação (2.8). Numa segunda etapa, substitua a altura geométrica ( $h$ ) pela altitude ortométrica ( $H$ ), isto é, negligencie a ondulação geoidal ( $N$ ). Desta maneira, a equação (2.8) fica reescrita como:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{N} + H) \cos(\phi) \cdot \cos(\lambda) \\ (\bar{N} + H) \cos(\phi) \cdot \sin(\lambda) \\ (\bar{N} (1 - e^2) + H) \sin(\phi) \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Agora, fazendo-se a diferença das equações (2.8) e (2.17) e recorrendo-se a equação (2.1) para substituir a diferença entre a altura geométrica ( $h$ ) e altitude ortométrica ( $H$ ) pela ondulação geoidal ( $N$ ), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = N \cdot \begin{bmatrix} \cos(\phi) \cdot \cos(\lambda) \\ \cos(\phi) \cdot \sin(\lambda) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

É importante lembrar que, um erro cometido nas coordenadas cartesianas se propaga na determinação dos parâmetros de transformação. Uma análise da influência deste erro, será mostrada no item 4.7.4 da seção 4.7.

### **3. PROPOSTA DE METODOLOGIA PARA COMPATIBILIZAÇÃO ENTRE REFERENCIAIS GEODÉSICOS**

#### **3.1 INTRODUÇÃO**

O presente capítulo descreve aspectos importantes, de fundamentação teórica, relativos à metodologia proposta. Para vencer esta etapa, estabeleceu-se uma abordagem com encadeamento do assunto focalizado, de maneira a dar embasamento suficiente para implementação da metodologia.

O propósito fundamental desta metodologia consiste em estabelecer o relacionamento entre referenciais geodésicos usando a transformação de similaridade a sete parâmetros, envolvendo não somente a determinação de parâmetros de transformação, mas também a modelagem das distorções associadas às respectivas realizações dos referenciais envolvidos. Primeiramente, o modelo matemático de transformação é focalizado. Este modelo considera, além das translações, rotações em torno dos eixos e diferença de escala entre os referenciais. Apresenta-se também, os usuais métodos de ajustamento empregados no processo de estimativa dos sete parâmetros de transformação.

Finalmente, é introduzido um procedimento para modelagem dos resíduos, com base em modelos polinomiais. Estes resíduos, também estimados no processo de ajustamento, refletem a parcela das deformações que o modelo matemático de transformação não foi capaz de absorver. Às coordenadas transformadas pelo modelo matemático usando os parâmetros previamente determinados, aplicam-se correções que são preditas por um modelo adequado. Assim, a transformação entre dois referenciais se processa mediante a aplicação de parâmetros estimados e de um modelo de distorções permitindo que estas sejam modeladas no processo de compatibilização.

### 3.2 MODELO MATEMÁTICO DE TRANSFORMAÇÃO

O modelo matemático de transformação usado para esta aplicação é a transformação de similaridade no espaço tridimensional. Esta transformação também é chamada de transformação isogonal, conforme ou de Helmert (LUGNANI, 1987, p.102). O modelo matemático desta transformação, expressa o relacionamento entre dois referenciais por meio de três translações, três rotações e um fator de escala.

A Figura 3.1 mostra o vetor posição de um ponto genérico no referencial cartesiano  $(x, y, z)$  dado por  $r_i$ . Após três translações expressas por  $(x_0, y_0, z_0)$ , três rotações expressas por  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$  e um fator de escala  $(\kappa)$ , obtém-se um novo vetor posição  $p_i$  relacionado ao referencial cartesiano que denomina-se de  $(X, Y, Z)$ .

De acordo com a Figura 3.1, os dois referenciais cartesianos tridimensionais, para qualquer ponto  $P_i$  do terreno, são relacionados por:

$$p_i = r_0 + \kappa \cdot R_\varepsilon \cdot r_i. \quad (3.1)$$

O modelo expresso pela equação (3.1) é a própria transformação de similaridade no espaço, onde:

$p_i$  – Vetor posição do ponto  $P_i$  no referencial cartesiano  $(X, Y, Z)$ ;

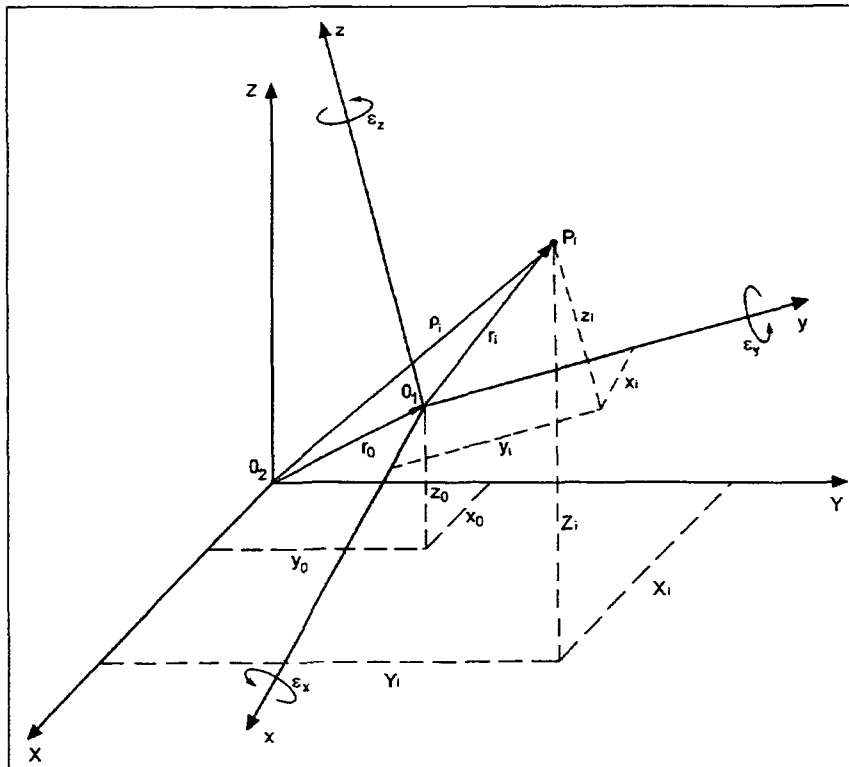
$r_i$  – Vetor posição do ponto  $P_i$  no referencial cartesiano  $(x, y, z)$ ;

$r_0$  – Vetor translação;

$R_\varepsilon$  – Matriz de rotação ortogonal;

$\kappa$  – Fator de escala.

Figura 3.1 – Relação entre dois referenciais cartesianos tridimensionais



Fonte: adaptado de PAGGI *et al.* (1994)

Para aplicação da transformação de similaridade no espaço, é necessário que as coordenadas geodésicas  $(\varphi, \lambda, h)$  sejam transformadas em coordenadas cartesianas tridimensionais  $(X, Y, Z)$ , usando a equação (2.8).

As três translações são justificadas pela não coincidência da origem dos dois referenciais; as três rotações são necessárias para expressar o não paralelismo, e um fator de escala é requerido para uniformizar (homogeneizar) a sua métrica. Assim, é necessário que existam pontos comuns, cujas coordenadas cartesianas são conhecidas em ambos os referenciais. O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) é o critério usado no procedimento de estimativa dos parâmetros.

Na equação (3.1), a matriz de rotação ortogonal  $R_\epsilon$  é dada por:

$$R_\epsilon = R_1(\epsilon_x) \cdot R_2(\epsilon_y) \cdot R_3(\epsilon_z). \quad (3.2)$$

A equação (3.2) expressa o produto das rotações parciais aplicadas, respectivamente, aos eixos terciário, secundário e primário. As quantidades  $R_1(\varepsilon_x)$ ,  $R_2(\varepsilon_y)$  e  $R_3(\varepsilon_z)$  também são matrizes de rotação ortogonais do tipo (THOMSON, 1976, p. 24 e 26; GEMAEL, 1981, p. 1.6; VANÍČEK e KRAKIWSKY, 1986, p. 38):

$$R_1(\varepsilon_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon_x) & \sin(\varepsilon_x) \\ 0 & -\sin(\varepsilon_x) & \cos(\varepsilon_x) \end{bmatrix}; \quad (3.3)$$

$$R_2(\varepsilon_y) = \begin{bmatrix} \cos(\varepsilon_y) & 0 & -\sin(\varepsilon_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varepsilon_y) & 0 & \cos(\varepsilon_y) \end{bmatrix}; \quad (3.4)$$

$$R_3(\varepsilon_z) = \begin{bmatrix} \cos(\varepsilon_z) & \sin(\varepsilon_z) & 0 \\ -\sin(\varepsilon_z) & \cos(\varepsilon_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Agora, considerando a estrutura das equações (3.3), (3.4) e (3.5), pode-se reescrever a equação (3.2) da seguinte maneira:

$$R_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_y \cdot \cos \varepsilon_z & \cos \varepsilon_y \cdot \sin \varepsilon_z & -\sin \varepsilon_y \\ \sin \varepsilon_x \cdot \sin \varepsilon_y \cdot \cos \varepsilon_z - \cos \varepsilon_x \cdot \sin \varepsilon_z & \sin \varepsilon_x \cdot \sin \varepsilon_y \cdot \sin \varepsilon_z + \cos \varepsilon_x \cdot \cos \varepsilon_z & \sin \varepsilon_x \cdot \cos \varepsilon_y \\ \cos \varepsilon_x \cdot \sin \varepsilon_y \cdot \cos \varepsilon_z + \sin \varepsilon_x \cdot \sin \varepsilon_z & \cos \varepsilon_x \cdot \sin \varepsilon_y \cdot \sin \varepsilon_z - \sin \varepsilon_x \cdot \cos \varepsilon_z & \cos \varepsilon_x \cdot \cos \varepsilon_y \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Após uma inspeção na equação (3.6), verifica-se que a mesma não é linear em relação às rotações diferenciais  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$ . Em geodésia, estas rotações são pequenas (GEMAEL, 1991, p. 12.16; LEICK, 1995, p. 478). Dada a pequena magnitude prevista para as rotações, pode-se aplicar o desenvolvimento em série de Taylor, negligenciando quantidades de ordem dois e superiores. Assim, a equação (3.6) se simplifica como:

$$R_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

onde as rotações  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  são dadas em radianos.

O fator de escala  $\kappa$ , pode ser escrito como:

$$\kappa = 1 + \delta, \quad (3.8)$$

onde  $\delta$  representa uma diferença de escala (LAMBECK, 1971, p. 38; THOMSON, 1976, p. 62; ABIB, 1978, p. 34; GEMAEL, 1981, p. 4.17; RENS e MERRY, 1990; ABUSALI et al., 1995, p. 65). Logo, é fácil perceber que para uma métrica homogênea entre os referenciais, a diferença de escala  $\delta$  deve ser nula e o fator de escala  $\kappa$  igual a unidade.

A equação (3.1), após substituição da equação (3.8), fica reescrita como:

$$\rho_i = r_0 + (1 + \delta) \cdot R_\varepsilon \cdot r_i. \quad (3.9)$$

Considerando-se a equação (3.7), pode-se expressar a equação (3.9) em linguagem matricial como:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + (1 + \delta) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Uma manipulação na equação (3.10), considerando-se o produto da matriz de rotação  $R_\varepsilon$  pelo vetor  $r_i$ , nos permite expressá-la na forma:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + (1 + \delta) \cdot \begin{bmatrix} x_i + \varepsilon_z \cdot y_i - \varepsilon_y \cdot z_i \\ -\varepsilon_z \cdot x_i + y_i + \varepsilon_x \cdot z_i \\ \varepsilon_y \cdot x_i - \varepsilon_x \cdot y_i + z_i \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Para atender aos objetivos propostos, o modelo expresso pela equação (3.11) será usado em dois sentidos. O primeiro se refere à constituição de sistemas de equações, tendo em vista a estimativa de parâmetros de transformação. O segundo, consiste na aplicação direta do modelo, agora com os parâmetros figurando como quantidades conhecidas.

Literaturas dedicadas ao assunto apresentam, basicamente, dois métodos usados na estimativa dos parâmetros, com base no critério do Método dos Mínimos



Quadrados (M.M.Q.). As formulações de tais métodos, denominados de método paramétrico e método combinado são descritas com detalhes em GEMAEL (1994) e LEICK (1995).

Uma revisão sucinta destes dois métodos é feita na próxima seção deste capítulo. Nela, apresenta-se uma abordagem suficiente para introduzir o leitor no contexto deste trabalho.

### 3.3 AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

#### 3.3.1 AJUSTAMENTO PELO M.M.Q.

Neste item, o ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados (M.M.Q.) é apresentado. Aqui, há de se considerar o M.M.Q. como um critério para estimativa das incógnitas envolvidas no processo de ajustamento que consiste na minimização da função  $V^T P V$ , cujos elementos serão definidos ainda neste item. Estas incógnitas estão, de algum modo, ligadas a um conjunto de observações redundantes por um modelo matemático adequado.

O ajustamento pelo M.M.Q. tem por objetivos (GEMAEL, 1994, p. 15):

- estimar, mediante a aplicação de modelos matemáticos adequados e do M.M.Q., um valor único para cada uma das incógnitas do problema;
- estimar a precisão de tais incógnitas e a eventual correlação entre elas.

A precisão das incógnitas é obtida da sua matriz variância-covariância (MVC) determinada após o ajustamento. A MVC é uma matriz simétrica, isto é,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , cujos elementos da diagonal são as variâncias  $\sigma_i^2$ , enquanto que as covariâncias  $\sigma_{ij}$  entre as variáveis estão dispostas fora da diagonal. Esta matriz desempenha

papel relevante na análise do ajustamento. Além de possibilitar a estimativa da precisão com que as incógnitas foram obtidas, ela fornece subsídios para avaliar a correlação entre elas, isto é, o grau de dependência das variáveis envolvidas no processo de ajustamento.

A matriz variância-covariância ou simplesmente matriz covariância é, provavelmente, a quantidade mais importante em estatística multivariada usada em geodésia (VANÍCEK E KRAKIWSKY, 1986, p. 43). Sua estrutura é:

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

O coeficiente de correlação linear por sua vez, pode ser obtido por:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j}, \quad (3.13)$$

cujos elementos também podem ser dispostos numa matriz denominada de matriz correlação, a qual possui mesma ordem da matriz covariância. Uma propriedade importante dos coeficientes de correlação é (LEICK, 1995, p. 105):

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1. \quad (3.14)$$

A matriz correlação é simétrica, isto é,  $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ . Pela equação (3.13), vê-se que os elementos da diagonal são iguais a unidade, ou seja,  $\rho_{ij} = 1$  se  $i=j$ . A estrutura da matriz correlação, deste modo, tem a forma:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Pelo exposto no primeiro parágrafo deste item, torna-se necessário definir as variáveis envolvidas no processo de ajustamento pelo M.M.Q.. Assim, tem-se:

$L_a(m,1)$  – Vetor das observações ajustadas;

$L_b(m,1)$  – Vetor das observações brutas;

$V(m,1)$  – Vetor dos resíduos;

$X_a(u,1)$  – Vetor dos parâmetros ajustados;

$X_0(u,1)$  – Vetor dos parâmetros aproximados;

$X(u,1)$  – Vetor das correções,

onde o conteúdo entre parênteses indica a dimensão do vetor ou matriz, com:

$m$  – número de observações;

$u$  – número de parâmetros,

de maneira que:

$$L_a = L_b + V; \quad (3.16)$$

e

$$X_a = X_0 + X. \quad (3.17)$$

Para matrizes e vetores aqui apresentadas, vale esclarecer que o índice a denota quantidades ajustadas, o índice 0 representa quantidades aproximadas e o índice b é usado para quantidades observadas. O número total de estações comuns com coordenadas conhecidas em ambos os referenciais é denotado por n e o número de parâmetros u é igual a 7 (sete).

A variância  $\sigma_i^2$  das observações indica a sua precisão, isto é, quanto mais precisas as observações, menor sua variância. Quando estas observações não oferecem o mesmo grau de confiança, pode-se homogeneizá-las pela atribuição de pesos, sendo estes definidos por GEMAEL (1994, p. 72 e 96) como:

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \quad (3.18)$$

ou

$$P = \sigma_0^2 \cdot \Sigma_{L_b}^{-1}, \quad (3.19)$$

com:

$\Sigma_{L_b}$  – Matriz covariância das observações;

P – Matriz peso das observações;

$p_i$  – Peso da i-ésima observação;

$\sigma_i^2$  – Variância da i-ésima observação;

$\sigma_0^2$  – Variância da observação de peso unitário a priori.

Quando as observações são não correlacionadas, a matriz representada pela equação (3.19) se reduz a uma matriz diagonal, cujos elementos são o inverso das variâncias  $\sigma_i^2$  das observações, considerando-se a variância a priori  $\sigma_0^2$  igual a unidade.

A escolha da variância a priori  $\sigma_0^2$  não interfere nas estimativas dos vetores incógnitos X e V. Este valor de  $\sigma_0^2$  é arbitrado antes do ajustamento, isto é, na composição da matriz dos pesos P que é dada pela equação (3.19).

Uma grande capacidade do ajustamento pelo M.M.Q. é a de obter uma estimativa da variância após o ajustamento. Ela é função dos resíduos e da matriz dos pesos, sendo chamada de variância da observação de peso unitário a posteriori, e dada em (GEMAEL, 1994, p. 100) por:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{S}, \quad (3.20)$$

onde S é chamado de graus de liberdade e é numericamente igual ao número de equações redundantes nos modelos (3.21) e (3.52), a serem apresentados.

GEMAEL (1994, p. 122) sugere a aplicação de um teste de hipótese, baseado na distribuição  $\chi^2$ , para constatar se a discrepância (quando houver) entre  $\sigma_0^2$  e  $\hat{\sigma}_0^2$  é significativa a um certo nível de confiança, geralmente fixado em 95%.

### 3.3.2 MÉTODO COMBINADO

Este item é dedicado a apresentar a formulação matemática do método combinado de ajustamento cujo objetivo, neste trabalho, é a determinação de parâmetros de transformação. Sua descrição é apresentada de forma a atender ao objetivo proposto. O leitor interessado em maiores detalhes, é remetido à GEMAEL (1994, cap. 10) e LEICK (1995, cap. 4).

O modelo matemático do método combinado é também chamado de modelo misto de ajustamento. No caso focalizado, as coordenadas cartesianas de estações comuns em ambos os referenciais são as observações. O critério para estimativa dos parâmetros de transformação é o Método dos Mínimos Quadrados (M.M.Q.).

Neste método de estimação, as observações e parâmetros são relacionados por uma função matemática implícita dada por:

$$F(X_a, L_a) = 0. \quad (3.21)$$

Pelo exposto no segundo parágrafo deste item, nota-se que cada estação, com coordenadas conhecidas em ambos os referenciais, contribui com um conjunto de 6 (seis) observações. Assim, o número total de observações ( $m$ ) é dado por:

$$m = 6 \cdot n. \quad (3.22)$$

A substituição das equações (3.16) e (3.17) na equação (3.21) nos conduz a:

$$F(X_a, L_a) = F(X_0 + X, L_b + V) = 0. \quad (3.23)$$

O modelo matemático da equação (3.23) é linearizado por meio do desenvolvimento em série de Taylor no ponto de expansão  $(X_0, L_b)$ , o qual pode ser escrito, negligenciando quantidades de segunda ordem e superiores, como:

$$F(X_0, L_b) + \frac{\partial F}{\partial X_a} \Big|_{(X_0, L_b)} \cdot X + \frac{\partial F}{\partial L_a} \Big|_{(X_0, L_b)} \cdot V = 0 \quad (3.24)$$

ou de forma matricial como:

$$A \cdot X + B \cdot V + W = 0. \quad (3.25)$$

A equação (3.25) constitui o modelo linearizado para o método combinado de ajustamento. Ela representa um sistema de  $r$  equações, ligadas por  $6n$  observações e 7 (sete) parâmetros. Cada estação comum contribui com 3 (três) equações. Desta maneira, tem-se o número total de equações ( $r$ ) dado por:

$$r = 3 \cdot n. \quad (3.26)$$

Após dimensionar matrizes e vetores para aplicação de interesse, convém reescrever a equação (3.25) da seguinte maneira:

$${}_{3-n}A_{7 \cdot 7} X_{1+3-n} + {}_{6-n}B_{6-n} V_{1+3-n} + {}_{3-n}W_1 = {}_{3-n}0_1, \quad (3.27)$$

com:

$${}_{3-n}A_7 = \frac{\partial F}{\partial X_a} \Big|_{(X_0, L_b)}; \quad (3.28)$$

$${}_{3-n}B_{6-n} = \frac{\partial F}{\partial L_a} \Big|_{(X_0, L_b)}; \quad (3.29)$$

$${}_{3-n}W_1 = F(X_0, L_b). \quad (3.30)$$

As matrizes das derivadas parciais A e B devem ser avaliadas no ponto de expansão ( $X_0$ ,  $L_b$ ). O vetor erro de fechamento W é o valor da função matemática (3.21), também avaliada no ponto de expansão da série de Taylor.

O sistema matricial apresentado pela equação (3.27) é composto de  $3n$  equações algébricas. Os vetores incógnitos V e X apresentam um total de  $6n+7$  elementos a determinar. Claramente, vê-se que o número de equações formuladas é insuficiente para determinar o total de elementos incógnitos.

Além de minimizar a função  $V^T P V$ , a solução é obtida introduzindo-se um vetor de multiplicadores de Lagrange K e minimizando a função:

$$\phi(V, K, X) = V^T \cdot P \cdot V - 2 \cdot K^T \cdot (A \cdot X + B \cdot V + W). \quad (3.31)$$

A equação (3.31) é uma função de três variáveis, isto é, os vetores V, K e X. Uma condição necessária para minimizar esta função é que as suas derivadas parciais primeiras, com relação às incógnitas, devem ser nulas. Logo, tem-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial V} = 2 \cdot P \cdot V - 2 \cdot B^T \cdot K = 0 \quad \therefore P \cdot V - B^T \cdot K = 0; \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial K} = -2 \cdot (A \cdot X + B \cdot V + W) = 0 \quad \therefore A \cdot X + B \cdot V + W = 0; \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = -2 \cdot A^T \cdot K = 0 \quad \therefore A^T \cdot K = 0. \quad (3.34)$$

As expressões de cálculo, após dimensionadas para esta aplicação, apresentam na forma:

$${}_{3n}M_{3n} = {}_{3n}B_{6n \cdot 6n} P_{6n \cdot 6n}^{-1} B_{3n}^T; \quad (3.35)$$

$${}_7X_1 = -({}_7A_{3n \cdot 3n}^T {}_{3n}M_{3n}^{-1} {}_7A_7)^{-1} \cdot ({}_7A_{3n \cdot 3n}^T {}_{3n}M_{3n}^{-1} W_1); \quad (3.36)$$

$${}_{3n}K_1 = -{}_{3n}M_{3n}^{-1} \cdot ({}_{3n}A_7 \cdot {}_7X_1 + {}_{3n}W_1); \quad (3.37)$$

$${}_{6n}V_1 = {}_{6n}P_{6n \cdot 6n}^{-1} B_{3n \cdot 3n}^T K_1. \quad (3.38)$$

Agora, uma inspeção nas equações (3.36), (3.37) e (3.38) permite verificar que elas formam um sistema composto de  $9n+7$  equações regido pelo mesmo número de incógnitas. Estas, são os  $6n$  valores de resíduos  $V$ ,  $3n$  multiplicadores de Lagrange  $K$ , e 7 (sete) são os elementos que entram para compor o vetor das correções  $X$ , cujos valores são obtidos recorrendo-se à equação (3.36). Com isto, torna-se possível o cálculo do vetor dos multiplicadores de Lagrange  $K$  pela equação (3.37) e, conseqüentemente, a estimativa do vetor dos resíduos  $V$  pela equação (3.38).

O vetor das observações ajustadas ( $L_a$ ) e o vetor dos parâmetros ajustados ( $X_a$ ) são obtidos, respectivamente, pelas equações (3.16) e (3.17). Este procedimento requer iterações para reparar os problemas de aproximação da série na equação (3.24).

Para conciliar a transformação de similaridade com o método combinado, é conveniente reescrever a equação (3.11), no sentido de expressá-la na forma homogênea como na equação (3.21). Assim, o modelo matemático para esta aplicação apresenta como:

$$\begin{bmatrix} x_0 + \varepsilon_z \cdot y_i - \varepsilon_y \cdot z_i \\ y_0 + \varepsilon_x \cdot z_i - \varepsilon_z \cdot x_i \\ z_0 + \varepsilon_y \cdot x_i - \varepsilon_x \cdot y_i \end{bmatrix} + \delta \cdot \begin{bmatrix} x_i + \varepsilon_z \cdot y_i - \varepsilon_y \cdot z_i \\ y_i + \varepsilon_x \cdot z_i - \varepsilon_z \cdot x_i \\ z_i + \varepsilon_y \cdot x_i - \varepsilon_x \cdot y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_i - X_i \\ y_i - Y_i \\ z_i - Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

O sistema homogêneo formado pela equação (3.39) congrega um conjunto de  $3n$  equações, cujas incógnitas são os 7 (sete) parâmetros de transformação, a saber:

$$\begin{array}{ll} 3 \text{ translações} & : (x_0, y_0, z_0); \\ 3 \text{ rotações} & : (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z); \\ 1 \text{ diferença de escala} & : (\delta) \end{array}$$

ou de forma vetorial como:



$$X_a = [x_0 \ y_0 \ z_0 \ \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \delta]^T. \quad (3.40)$$

As matrizes das derivadas parciais A e B dadas, respectivamente, pelas expressões (3.28) e (3.29), podem ser extraídas do sistema homogêneo representado pela equação (3.39) que, para um ponto  $P_i$  genérico, apresentam na forma:

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -(1+\delta) \cdot z_i & (1+\delta) \cdot y_i & (x_i + \varepsilon_z \cdot y_i - \varepsilon_y \cdot z_i) \\ 0 & 1 & 0 & (1+\delta) \cdot z_i & 0 & -(1+\delta) \cdot x_i & (y_i + \varepsilon_x \cdot z_i - \varepsilon_z \cdot x_i) \\ 0 & 0 & 1 & -(1+\delta) \cdot y_i & (1+\delta) \cdot x_i & 0 & (z_i + \varepsilon_y \cdot x_i - \varepsilon_x \cdot y_i) \end{bmatrix}; \quad (3.41)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} (1+\delta) & (1+\delta) \cdot \varepsilon_z & -(1+\delta) \cdot \varepsilon_y & -1 & 0 & 0 \\ -(1+\delta) \cdot \varepsilon_z & (1+\delta) & (1+\delta) \cdot \varepsilon_x & 0 & -1 & 0 \\ (1+\delta) \cdot \varepsilon_y & -(1+\delta) \cdot \varepsilon_x & (1+\delta) & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

O vetor erro de fechamento W dado pela equação (3.30), também pode ser obtido pela equação (3.39), quando seu primeiro membro é avaliado no ponto de expansão  $(X_0, L_b)$ . Assim, para iniciar o ajustamento, torna-se necessário conhecer o ponto de expansão da série de Taylor  $(X_0, L_b)$ . A equação (3.39) sendo linear, é possível arbitrar um valor nulo para o vetor dos parâmetros aproximados  $X_0$  de maneira que a equação (3.40) se torna:

$$X_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (3.43)$$

Considerando-se as equações (3.39), (3.41), (3.42) e (3.43), pode-se obter na etapa básica, as sub-matrizes  $A_i$ ,  $B_i$  e o sub-vetor erro de fechamento  $W_i$  por:

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z_i & y_i & x_i \\ 0 & 1 & 0 & z_i & 0 & -x_i & y_i \\ 0 & 0 & 1 & -y_i & x_i & 0 & z_i \end{bmatrix}; \quad (3.44)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad (3.45)$$

$$W_i = \begin{bmatrix} x_i - X_i \\ y_i - Y_i \\ z_i - Z_i \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

As matrizes A e B são geradas, respectivamente, pela concatenação de todas as sub-matrizes  $A_i$  e  $B_i$ . Analogamente, o vetor erro de fechamento W é formado pela concatenação de todos os sub-vetores  $W_i$ . Assim, tem-se:

$${}_{3n}A_7 = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}; \quad (3.47)$$

$${}_{3n}B_{6n} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_n \end{bmatrix}; \quad (3.48)$$

$${}_{3n}W_1 = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

A variância à posteriori  $\hat{\sigma}_0^2$  pode ser estimada pela equação (3.20), onde o número de graus de liberdade S, é dado por:

$$S = 3 \cdot n - 7. \quad (3.50)$$

A matriz covariância dos parâmetros ajustados, cuja estrutura é a mesma da equação (3.12), tem a seguinte forma:

$$\sum x_s = \sigma_0^2 \cdot (A^T \cdot M^{-1} \cdot A)^{-1}. \quad (3.51)$$

A matriz correlação é estruturada na forma da equação (3.15), cujos elementos são determinados pela equação (3.13).

### 3.3.3 MÉTODO PARAMÉTRICO

Neste item, o método paramétrico é apresentado. Sua descrição é feita numa abordagem suficiente para atender um de nossos objetivos, qual seja, a determinação de parâmetros de transformação entre dois referenciais. O leitor interessado em maiores detalhes é remetido à GEMAEL (1994; cap. 7, p. 115).

O método paramétrico é também denominado de método das equações de observação, já que cada observação contribui com uma equação. No caso em evidência, as diferenças de coordenadas entre estações comuns em ambos os referenciais, são tratadas como as observações, isto é, a diferença entre os vetores  $p_i$  e  $r_i$ . Cada estação comum gera três observações e, conseqüentemente, três equações. Também aqui, como no item anterior, o Método dos Mínimos quadrados (M.M.Q.) é o critério utilizado para estimativa dos parâmetros de transformação.

Neste caso, as observações e parâmetros são relacionadas por uma função matemática explícita da forma:

$$L_a = F(X_a). \quad (3.52)$$

Agora, convém substituir as equações (3.16) e (3.17) na equação (3.52) e proceder sua linearização recorrendo-se ao desenvolvimento em série de Taylor. Após este procedimento, o modelo pode ser escrito, negligenciando quantidades de ordem dois e superiores, como:

$$L_b + V = F(X_0 + X) = F(X_0) + \frac{\partial F}{\partial X_a} \Big|_{(X_0)} \cdot X. \quad (3.53)$$

Após alguma manipulação algébrica, convém reescrever a equação (3.53), dimensionando matrizes e vetores para aplicação de interesse, da seguinte forma:

$${}_{3n}V_1 = {}_{3n}A_7 \cdot {}_7X_1 + {}_{3n}L_1, \quad (3.54)$$

com:

$${}_{3n}A_7 = \frac{\partial F}{\partial X_a} \Big|_{(X_0)} ; \quad (3.55)$$

$${}_{3n}L_{0_1} = F(X_0) ; \quad (3.56)$$

$${}_{3n}L_1 = {}_{3n}L_{0_1} - {}_{3n}L_{b_1} . \quad (3.57)$$

A equação (3.54) é o modelo linearizado para o método paramétrico de ajustamento. Ela representa um sistema de  $3n$  equações, ligadas por igual número de observações e sete parâmetros. A matriz das derivadas parciais ( $A$ ) deve ser avaliada para um valor particular de  $X_0$ . Da mesma forma, o vetor  $L_0$  é o valor da função matemática (3.52), também avaliado para os parâmetros aproximados.

A solução pelo M.M.Q. é obtida, minimizando-se a forma quadrática fundamental:

$$\phi = V^T \cdot P \cdot V . \quad (3.58)$$

Para minimizar a equação (3.58) é necessário que sua derivada parcial primeira, com relação a  $X$ , seja nula. Da equação (3.58), tem-se:

$$\phi = F(V) \quad (3.59)$$

e da equação (3.54):

$$V = G(X). \quad (3.60)$$

Após aplicação da regra da cadeia, obtém-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial \phi}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial X} . \quad (3.61)$$

Segundo LEICK (1995, p. 510 e 511), tem-se:

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial V} \right) = 2 \cdot V^T \cdot P ; \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = A ; \quad (3.63)$$

Assim, tem-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = 2 \cdot V^T \cdot P \cdot A = 0 \therefore A^T \cdot P \cdot V = 0 . \quad (3.64)$$

Substituindo-se a equação (3.54) na equação (3.64), tem-se:

$$A^T \cdot P \cdot (A \cdot X + L) = 0 \quad \therefore \quad A^T \cdot P \cdot A \cdot X + A^T \cdot P \cdot L = 0 \quad (3.65)$$

ou de forma compacta como:

$${}_7N_7 \cdot {}_7X_1 + {}_7U_1 = {}_7O_1, \quad (3.66)$$

com:

$${}_7N_7 = {}_7A_{3n \cdot 3n}^T \cdot P_{3n \cdot 3n} \cdot A_7; \quad (3.67)$$

$${}_7U_1 = {}_7A_{3n \cdot 3n}^T \cdot P_{3n \cdot 3n} \cdot L_1. \quad (3.68)$$

A solução da equação (3.66) é dada por:

$${}_7X_1 = -{}_7N_7^{-1} \cdot {}_7U_1. \quad (3.69)$$

Existem outras formas para resolver sistemas do tipo das equações (3.36) e (3.69), sem a necessidade de utilizar a inversão da matriz dos coeficientes. Neste caso, a decomposição de Cholesky tem sido recomendado como uma maneira muito eficiente (VANÍCEK E KRAKIWSKY, 1986, p. 209; LEICK, 1995, p. 507; DRACUP, 1996, p. 14). Um estudo comparativo de algoritmos usando a decomposição de Cholesky é apresentado por DE JONGE (1992).

As observações ajustadas ( $L_a$ ) vem da equação (3.16) e o vetor dos parâmetros ajustados ( $X_a$ ) é obtido pela equação (3.17). Também neste caso, as iterações são necessárias para reparar os problemas de aproximação da série na equação (3.53).

Com esta abordagem objetiva, tem-se o interesse em estimar grandezas (parâmetros) vinculadas às observações por meio de um modelo matemático. Estas grandezas encontram-se implícitas no modelo matemático da transformação isogonal, apresentado na equação (3.9).

Para explicitar as observações ajustadas como uma função dos parâmetros ajustados (equação 3.52), é necessário manipular a equação (3.11), no

sentido de expressá-la numa forma mais conveniente à constituição de equações de observação. Logo, tem-se:

$$\begin{bmatrix} X_i - x_i \\ Y_i - y_i \\ Z_i - z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + \varepsilon_z \cdot y_i - \varepsilon_y \cdot z_i \\ y_0 + \varepsilon_x \cdot z_i - \varepsilon_z \cdot x_i \\ z_0 + \varepsilon_y \cdot x_i - \varepsilon_x \cdot y_i \end{bmatrix} + \delta \cdot \begin{bmatrix} x_i + \varepsilon_z \cdot y_i - \varepsilon_y \cdot z_i \\ y_i + \varepsilon_x \cdot z_i - \varepsilon_z \cdot x_i \\ z_i + \varepsilon_y \cdot x_i - \varepsilon_x \cdot y_i \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

A matriz das derivadas parciais (A) dada pela equação (3.55), é obtida da equação (3.70). Para cada estação  $P_i$ , obtém-se uma sub-matriz  $A_i$  idêntica àquela representada pela equação (3.41), a qual é repetida em benefício da clareza:

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -(1+\delta) \cdot z_i & (1+\delta) \cdot y_i & (x_i + \varepsilon_z \cdot y_i - \varepsilon_y \cdot z_i) \\ 0 & 1 & 0 & (1+\delta) \cdot z_i & 0 & -(1+\delta) \cdot x_i & (y_i + \varepsilon_x \cdot z_i - \varepsilon_z \cdot x_i) \\ 0 & 0 & 1 & -(1+\delta) \cdot y_i & (1+\delta) \cdot x_i & 0 & (z_i + \varepsilon_y \cdot x_i - \varepsilon_x \cdot y_i) \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

O vetor  $L_0$ , dado pela equação (3.56), também pode ser obtido pela equação (3.70) quando seu segundo membro é avaliado para os parâmetros aproximados  $X_0$ . É importante observar que o primeiro membro da equação (3.70) constitui o vetor  $L_b$  das observações. Assim, é possível obter o vetor  $L$  recorrendo-se à equação (3.57).

Agora é possível obter na etapa básica, a sub-matriz  $A_i$  e o sub-vetor  $L_i$ , após considerar as equações (3.43), (3.56), (3.57), (3.70) e (3.71), por:

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z_i & y_i & x_i \\ 0 & 1 & 0 & z_i & 0 & -x_i & y_i \\ 0 & 0 & 1 & -y_i & x_i & 0 & z_i \end{bmatrix}; \quad (3.72)$$

$$L_i = \begin{bmatrix} x_i - X_i \\ y_i - Y_i \\ z_i - Z_i \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

A sub-matriz  $A_i$ , dada pela equação (3.72) e o sub-vetor  $L_i$ , dado pela equação (3.73) são iguais, respectivamente, à sub-matriz  $A_i$ , dada pela equação (3.44) e o sub-vetor  $W_i$ , dado pela equação (3.46).

É importante notar que a semelhança entre as equações (3.46) e (3.73) não é uma coincidência, apenas, quando o vetor dos parâmetros aproximados  $X_0$  é nulo. Decerto, para quaisquer valores assumidos por  $X_0$ , a semelhança entre os sub-vetores  $W_i$  e  $L_i$  é mantida.

A matriz  $A$  é obtida pela concatenação de todas as sub-matrizes  $A_i$ . Também o vetor  $L$  é formado pela concatenação de todos os sub-vetores  $L_i$ . Logo, tem-se:

$${}_{3n}A_7 = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}; \quad (3.74)$$

$${}_{3n}L_1 = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

A variância à posteriori  $\hat{\sigma}_0^2$  pode ser estimada pela equação (3.20), onde o número de graus de liberdade  $S$ , é dado por:

$$S = 3 \cdot n - 7. \quad (3.76)$$

A matriz covariância dos parâmetros ajustados, cuja estrutura é a mesma da equação (3.12), tem a seguinte forma:

$$\sum x_i = \sigma_0^2 \cdot N^{-1}. \quad (3.77)$$

A matriz correlação é estruturada na forma da equação (3.15), cujos elementos são determinados pela equação (3.13).

### 3.4 MODELAGEM DOS RESÍDUOS

#### 3.4.1 FUNDAMENTO TEÓRICO

Este item é dedicado a apresentar o procedimento adotado para a modelagem dos resíduos. O fundamento teórico é composto de uma pequena revisão, destacando literaturas que tratam do assunto. Modelos polinomiais são discutidos com a finalidade de estimar correções que possam ser aplicadas às coordenadas transformadas usando os parâmetros estimados.

O conceito de modelagem das distorções tem sido tratado na literatura e não é novo. VANÍCEK E KRAKIWSKY (1986, p. 415) sugere um modelo analítico, baseado em uma regressão linear por mínimos quadrados, mas não apresenta nenhum desenvolvimento matemático. Outros trabalhos (JUNKINS, 1990; ABOUSALEM *et al.*, 1993; JUNKINS & ERICKSON, 1996) apresentam o relacionamento entre o NAD-27 e o NAD-83 por uma transformação de similaridade a sete parâmetros, mas alertam que esta abordagem não produz um relacionamento definitivo, devido às distorções do NAD-27 que devem ser modeladas.

As distorções relativas na rede geodésica da Arábia Saudita é apresentada por NAKIBOGLU *et al.*, (1994), cujas análises são baseadas na comparação das coordenadas entre uma rede terrestre e outra GPS.

Outras técnicas alternativas tem sido propostas. Este é o caso de expressar diretamente a variação de coordenadas usando um modelo polinomial (ABD-ELMOTAAL, 1994) ou a divisão da rede em regiões com a finalidade de minimizar as distorções (MERRY e WHITTAL, 1998).

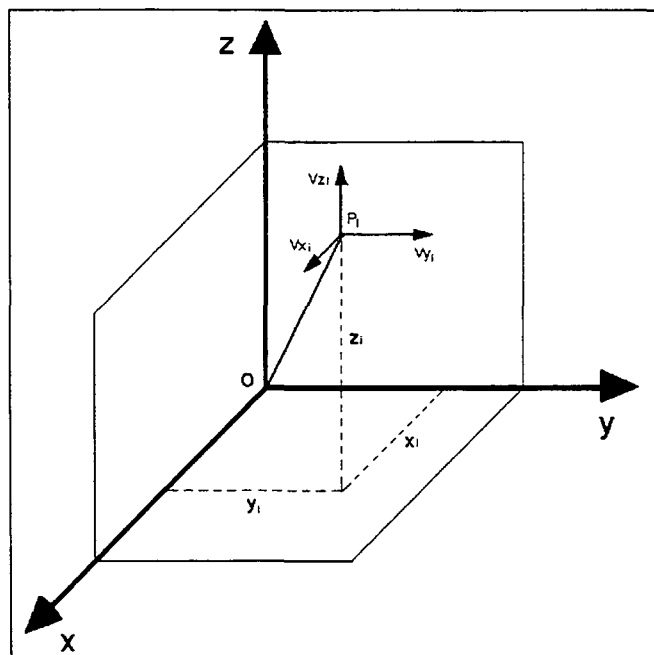


Esta alternativa de dividir a rede em regiões é também aplicada na rede geodésica do SGB (OLIVEIRA *et al.*, 1997, p.208; OLIVEIRA, 1998), onde é usada a transformação geométrica afim geral a doze parâmetros, combinada com a Triangulação de Delaunay. No caso brasileiro, a análise é feita com base nas duas últimas realizações do SBG, a qual foi constatada uma melhoria na nova realização devido a introdução de 34 pontos GPS coincidentes com a rede clássica.

Conforme descrito no primeiro parágrafo deste item, torna-se necessário enfatizar o objetivo proposto, que consiste no estabelecimento de um modelo polinomial com a finalidade de descrever o comportamento dos resíduos. A quantidade mais importante para análise das distorções é o vetor dos resíduos (NAKIBOGLU *et al.*, 1994, p. 226). Resíduos muito grandes podem indicar que as observações contém distorções, que não tem sido apropriadamente modeladas (VANÍCEK e STEEVES, 1996, p. 745).

As deformações não contempladas pelo modelo matemático de transformação são refletidas pelos resíduos estimados no processo de ajustamento. Se estas distorções não são modeladas, a transformação de coordenadas baseada nos parâmetros de transformação (conforme equação 3.10), contém erros devido a negligência dos efeitos sistemáticos. Assim, as coordenadas transformadas pela equação (3.10) com base nos parâmetros de transformação, devem ainda serem corrigidas de maneira que seus erros sejam minimizados. Portanto, a modelagem das distorções é uma etapa importante e que deve ser considerada no processo de compatibilização entre dois referenciais geodésicos.

Figura 3.2 – Resíduos da transformação de similaridade



Neste contexto, o mais importante é a magnitude e distribuição dos resíduos, indicativos de distorções que não são modeladas pela equação 3.10. A Figura 3.2 mostra o vetor dos resíduos oriundos do ajustamento, para um ponto genérico  $P_i$ , decomposto em suas componentes. Assim, pelo modelo polinomial, é possível gerar superfícies que descrevam o comportamento das distorções em função da posição do ponto. Estas superfícies são geradas com base nos valores de resíduos estimados no ajustamento. É oportuno salientar que, pela Figura 3.2, é possível gerar três superfícies, sendo uma para cada plano perpendicular à direção de cada componente do resíduo.

Conhecendo-se a função que descreve o comportamento das distorções, é possível estimar seu valor em qualquer ponto. É claro que a área de abrangência da função é aquela compreendida pelos pontos originais, isto é, aqueles onde se conhecem os valores de resíduos. As correções estimadas pelo modelo polinomial entram para compor um vetor de correções que devem ser aplicadas às coordenadas transformadas pela equação (3.10).

### 3.4.2 MODELOS POLINOMIAIS

Neste trabalho utilizou-se métodos polinomiais na modelagem dos resíduos. A descrição de tais métodos é feita de maneira sucinta com o escopo de atender uma das finalidades deste trabalho, que consiste na geração de um modelo polinomial para descrever o comportamento das distorções. O leitor interessado em maiores detalhes sobre métodos polinomiais é remetido à LANCASTER e SALKAUSKAS (1986, cap. 7).

As relações polinomiais são utilizadas em problemas de interpolação, ajustamento fotogramétrico por faixa e em modelagem de distorções (LUGNANI, 1987, p. 106). No caso focalizado, os polinômios são usados na modelagem de distorções, de maneira que se torne possível predizer ou estimar seu valor em qualquer ponto da rede.

Pelo apresentado no item anterior, as três superfícies a serem geradas, seguem equações do tipo:

$$V_x = t_1(y, z); \quad (3.78)$$

$$V_y = t_2(z, x); \quad (3.79)$$

$$V_z = t_3(x, y), \quad (3.80)$$

onde as funções  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são superfícies polinomiais de grau  $k$  da forma:

$$V_x = t_1(y, z) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i a_{ij} \cdot y^{i-j} \cdot z^j; \quad (3.81)$$

$$V_y = t_2(z, x) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i b_{ij} \cdot z^{i-j} \cdot x^j; \quad (3.82)$$

$$V_z = t_3(x, y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i c_{ij} \cdot x^{i-j} \cdot y^j, \quad (3.83)$$

com  $i \geq 0$ ,  $j \geq 0$  e  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sendo as coordenadas cartesianas mostradas na Figura 3.2.

Os coeficientes  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ , e  $c_{ij}$  são estimados pelo Método dos Mínimos Quadrados. O número de coeficientes ( $m$ ) da superfície polinomial é dado por:

$$m = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}, \quad (3.84)$$

onde  $k$  representa o grau do polinômio.

É claro que uma melhor análise das distorções pode ser efetuada quanto maior for a quantidade de pontos disponíveis para a geração da superfície polinomial. A precisão da modelagem fica dependente da densidade de pontos na área e do grau do polinômio utilizado. É importante observar que se o grau do polinômio cresce, o número de coeficientes da superfície polinomial a serem determinados, também cresce, conforme a equação (3.84).

Os resíduos estimados no ajustamento são as observações. Cada componente de resíduo é uma observação e pode gerar uma equação do tipo da (3.81), (3.82) ou (3.83). Este é o caso típico do método paramétrico de ajustamento, cuja solução segue a mesma marcha daquela descrita no item 3.3.3. O sistema de equações normais, dimensionado para esta aplicação, tem a forma:

$${}_m a_1 = -({}_m A_n^T \cdot P_n \cdot A_m)^{-1} \cdot ({}_m A_n^T \cdot P_n \cdot L_1), \quad (3.85)$$

na qual, equações similares podem ser escritas para os outros coeficientes,  $b$  e  $c$ , onde:

$m$  – Número de coeficientes da superfície polinomial;

$n$  – Número de pontos;

$a$  – Vetor contendo os coeficientes ajustados do polinômio;

$A$  – Matriz de derivadas parciais;

$P$  – Matriz peso;

$L$  – Vetor coluna dada como na equação (3.57).

### 3.5 RESUMO DAS OPERAÇÕES

Esta seção apresenta um resumo das operações necessárias para implementação e aplicação da metodologia proposta. A organização do assunto foi disposta numa forma seqüencial visando um melhor entendimento do assunto.

Como foi apresentado na seção 3.2, o modelo expresso pela equação (3.11) terá seu uso em dois sentidos. A primeira aplicação do modelo é na estimativa de parâmetros de transformação. Estes parâmetros podem ser estimados se é conhecido um mínimo de três pontos comuns em dois referenciais.

A transformação das coordenadas geodésicas ( $\phi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ) em suas correspondentes coordenadas cartesianas ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) é possível pela aplicação da equação (2.8). Após esta etapa é aplicada uma transformação de similaridade a sete parâmetros ao conjunto de coordenadas comuns nos dois referenciais. O ajustamento no qual esta transformação se baseia fornece os parâmetros de transformação estimados e os resíduos, os quais são muito úteis na análise das distorções. É estabelecido um modelo polinomial para descrever o comportamento dos resíduos e estimar correções que devem ser aplicadas às coordenadas transformadas.

A segunda aplicação do modelo é, efetivamente, na transformação de coordenadas utilizando os parâmetros de transformação estimados no ajustamento. A equação (3.70) constitui equações de observação escrita de maneira conveniente para aplicação do método paramétrico. Após considerar a equação (3.16), a equação (3.70) fica reescrita como:

$$\begin{bmatrix} X_i - x_i \\ Y_i - y_i \\ Z_i - z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + \varepsilon_z \cdot y_i - \varepsilon_y \cdot z_i \\ y_0 + \varepsilon_x \cdot z_i - \varepsilon_z \cdot x_i \\ z_0 + \varepsilon_y \cdot x_i - \varepsilon_x \cdot y_i \end{bmatrix} + \delta \cdot \begin{bmatrix} x_i + \varepsilon_z \cdot y_i - \varepsilon_y \cdot z_i \\ y_i + \varepsilon_x \cdot z_i - \varepsilon_z \cdot x_i \\ z_i + \varepsilon_y \cdot x_i - \varepsilon_x \cdot y_i \end{bmatrix}, \quad (3.86)$$

onde  $V_x$ ,  $V_y$  e  $V_z$  são as correções previstas pelo modelo polinomial.

Como já foi dito, as distorções são relativas e podem ser consideradas de um referencial origem (O) para um referencial destino (D). Aqui, o referencial (X, Y, Z) é uma “nova” realização e o referencial (x, y, z) é uma “antiga” realização. Logo, considera-se a “nova” realização livre de distorções e as atribui à “antiga” realização, de maneira que o referencial (X, Y, Z) seja fixo. Desta maneira, após manipular a equação (3.86), tem-se:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + (1 + \delta) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -V_x \\ -V_y \\ -V_z \end{bmatrix}. \quad (3.87)$$

Inicialmente, as coordenadas geodésicas ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ) no referencial origem, são transformadas em suas correspondentes coordenadas cartesianas (x, y, z) pela equação (2.8). Agora, com as correções estimadas pelo modelo polinomial representado pelas equações (3.81), (3.82) e (3.83) e os parâmetros de transformação estimados no ajustamento é possível aplicar a equação (3.87). Com isto, obtém-se as coordenadas cartesianas (X, Y, Z) no referencial destino, as quais podem ser transformadas em suas correspondentes coordenadas geodésicas ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ) utilizando o conjunto de equações (2.9) a (2.15).

## **4. IMPLEMENTAÇÃO DA METODOLOGIA, ENSAIOS REALIZADOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS**

### **4.1 INTRODUÇÃO**

Os aspectos de fundamentação teórica referentes à metodologia proposta foram descritos no capítulo 3. Neste capítulo, apresenta-se a implementação prática da metodologia. Para isto, foi necessário a realização de vários testes baseados na metodologia proposta, cujos resultados comprovam a sua eficiência e eficácia. As análises obtidas à partir dos resultados gerados vem validar a metodologia em questão.

A escolha de uma área de estudo, a ser apresentada na seção 4.2 foi imprescindível para a realização dos ensaios que são descritos nas seções 4.7 e 4.8. Nestes ensaios foram utilizadas as coordenadas de vértices pertencentes à Rede Planimétrica do SGB, as quais são apresentadas no Anexo (I).

As ondulações geoidais foram obtidas utilizando-se o programa MAPGEO, cuja descrição encontra-se na seção 4.3. Na seção 4.4, apresenta-se o procedimento adotado para escolha dos pontos de controle. Neste trabalho, pontos de controle são aqueles nos quais se conhecem suas coordenadas tanto no referencial origem quanto no referencial destino. Estes pontos de controle são usados para testar o desempenho dos interpoladores utilizados na modelagem dos resíduos, os quais não participam tanto do processo de parametrização (estimativa dos parâmetros) quanto da estimativa dos coeficientes do modelo polinomial. Nesta modelagem utilizou-se um modelo polinomial, como descrito no item 3.4.2 da seção 3.4.

Para atingir aos objetivos propostos neste capítulo houve a necessidade do desenvolvimento de rotinas, cujos códigos foram escritos em ambiente MATLAB. O desenvolvimento de rotinas é focalizado na seção 4.5, cuja finalidade se evidencia no processamento dos dados que é apresentado na seção 4.6.

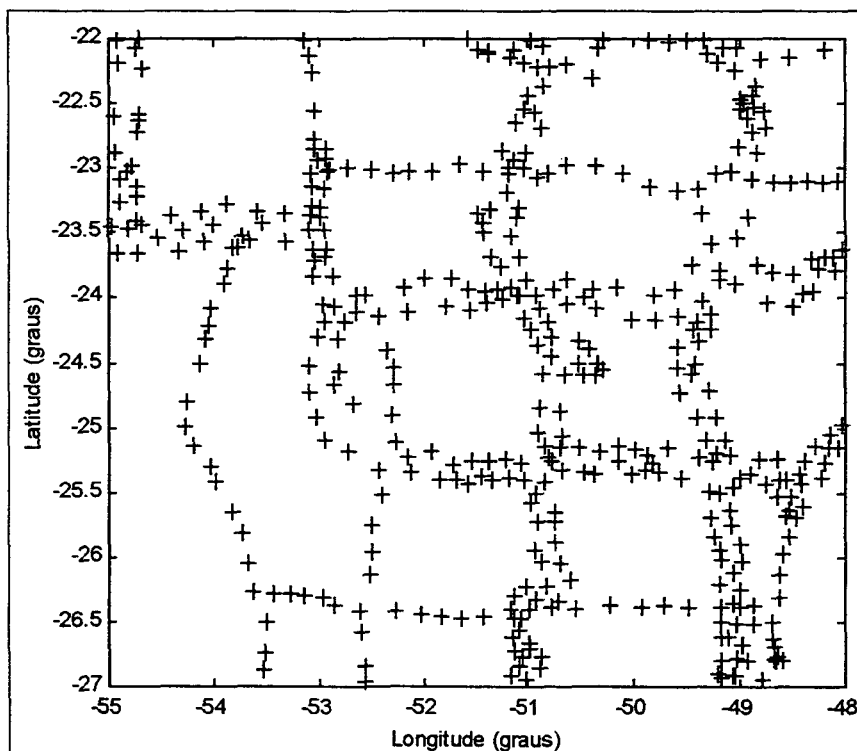
A análise dos resultados está fundamentada, principalmente, na comparação dos erros obtidos da metodologia clássica e da metodologia proposta. Estes erros são representados pelas diferenças entre as coordenadas cartesianas estimadas pela aplicação de cada metodologia adotada e as coordenadas cartesianas dos pontos de controle, consideradas como verdadeiras. Neste trabalho, o termo metodologia clássica significa a aplicação da transformação de similaridade para estimativa de coordenadas e metodologia proposta significa a aplicação da transformação de similaridade associada à um modelo de distorções também para estimativa de coordenadas.

## 4.2 DESCRIÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO

Com o objetivo de testar a metodologia proposta, escolheu-se uma área de estudo para a realização dos ensaios. Os testes foram conduzidos utilizando-se as coordenadas de vértices pertencentes à rede planimétrica do SGB contidas nas suas duas últimas realizações, cujas coordenadas geodésicas aproximadas são apresentadas no Anexo (I). A quantidade de estações, comuns às duas materializações, totalizam 438 pontos.



Figura 4.1 – Área de estudo com as estações do SGB



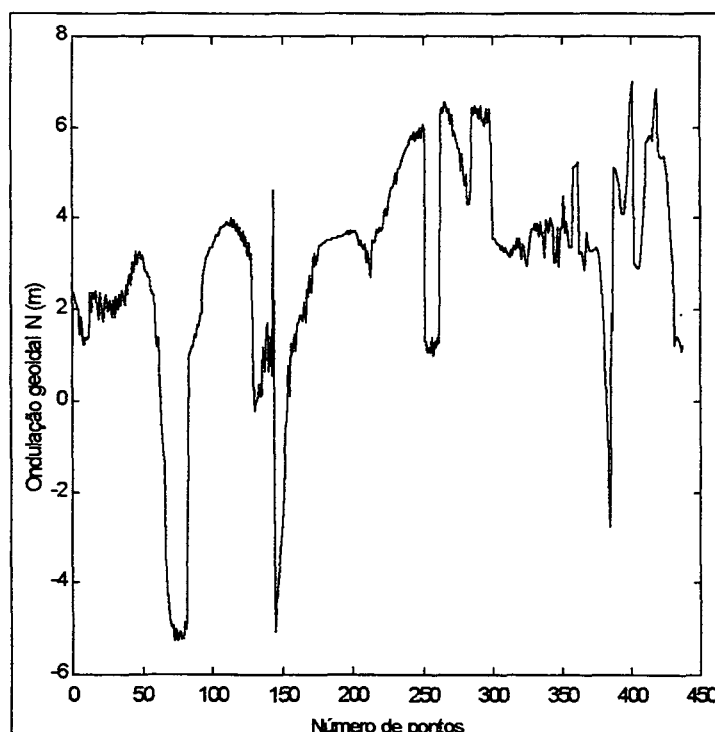
Esta área foi escolhida limitando-se uma região de interesse, compreendendo todo o estado do Paraná e parte dos estados de São Paulo, Mato Grosso do Sul e Santa Catarina.

A Figura 4.1 mostra a área de estudo e as estações do SGB, cujos limites são os paralelos  $22^{\circ}$  e  $27^{\circ}$  de latitude sul e meridianos  $48^{\circ}$  e  $55^{\circ}$  de longitude oeste. Os dados foram fornecidos pelo Departamento de Geodésia da Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

### 4.3 OBTENÇÃO DAS ONDULAÇÕES GEOIDAIS

As coordenadas das estações disponíveis para este trabalho, conforme fornecidas pelo IBGE são a latitude ( $\phi$ ), a longitude ( $\lambda$ ), geodésicas, e a altitude ortométrica ( $H$ ), as quais são mostradas no Anexo (I). A aplicação do modelo matemático de transformação, descrito na seção 3.2, requer que se disponha de coordenadas cartesianas tridimensionais ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ). Isto torna-se possível recorrendo-se à equação (2.8), que exprime o relacionamento entre coordenadas geodésicas e suas correspondentes coordenadas cartesianas. Para viabilizar o processo, a altitude ortométrica ( $H$ ) deve ser substituída pela altura elipsóidica ( $h$ ).

Gráfico 4.1 – Magnitude da ondulação geoidal  $N$  para a área de estudo



O programa MAPGEO, elaborado no âmbito do convênio IBGE-EPUSP, possibilitou a determinação das ondulações geoidais, também apresentadas no Anexo (I). O Gráfico 4.1 mostra a magnitude da ondulação geoidal ( $N$ ) referente à área de estudo. O MAPGEO foi desenvolvido na linguagem FORTRAN 5, sendo

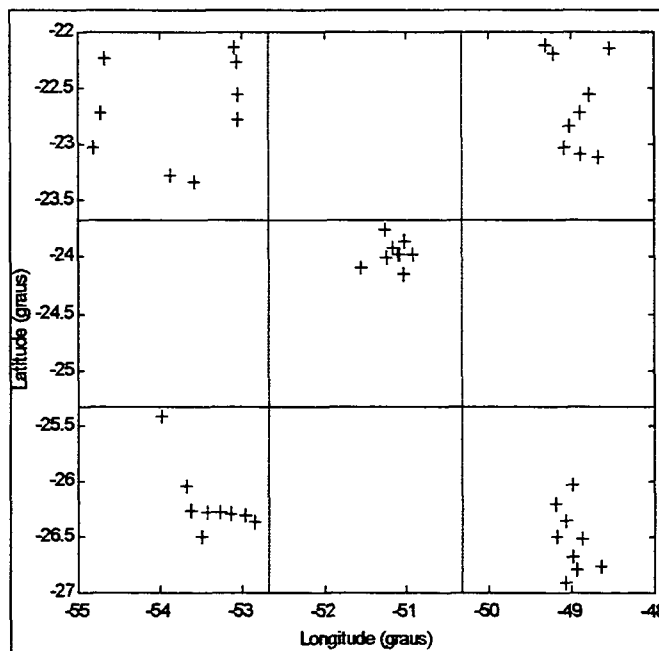
utilizado neste trabalho, a versão 1.0. O erro absoluto esperado para o mapa geoidal é de 3m e o relativo de 1cm/km (IBGE, 1996).

O conhecimento da altitude ortométrica (H) e da ondulação geoidal (N), permite a aplicação da equação (2.1), possibilitando a obtenção das correspondentes alturas elipsóidicas que também são mostradas no Anexo (I).

#### 4.4 ESCOLHA DOS PONTOS DE CONTROLE

A análise do desempenho do modelo polinomial, apresentado no item 3.4.2 da seção 3.4, foi feita com base em 45 pontos de controle distribuídos na área de estudo, correspondendo a 10.27% do total de pontos. Para facilitar a identificação dos pontos de controle a área foi dividida em outras nove sub-áreas, das quais cinco foram escolhidas ( $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $A_5$ ), sendo estas localizadas nos extremos e na região central, conforme ilustrado na Figura 4.2.

Figura 4.2 – Distribuição geográfica dos pontos de controle



A Figura 4.2 mostra a área total dividida em sub-áreas e a distribuição geográfica dos pontos de controle. Estes pontos de controle não participam tanto do processo de parametrização quanto da estimativa dos coeficientes do modelo polinomial. A escolha destes pontos de controle foi feita de forma aleatória como em qualquer processo de controle de qualidade.

Quadro 4.1 – Limites geográficos das sub-áreas

Sub-área	Limites das sub-áreas			
	Paralelos (S)		Meridianos (W)	
A <sub>1</sub>	22° 00'	23° 40'	52° 40'	55° 00'
A <sub>2</sub>	22° 00'	23° 40'	48° 00'	50° 20'
A <sub>3</sub>	23° 40'	25° 20'	50° 20'	52° 40'
A <sub>4</sub>	25° 20'	27° 00'	52° 40'	55° 00'
A <sub>5</sub>	25° 20'	27° 00'	48° 00'	50° 20'

Os limites geográficos de cada sub-área escolhida são mostrados no Quadro 4.1. Em cada sub-área escolhida, foram selecionados um total de nove pontos, cujos códigos são mostrados no Quadro 4.2.

Quadro 4.2 – Estações utilizadas nos testes como pontos de controle

Testes	Código dos pontos retirados				
	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
1	2101	163	1155	11006	99
2	2097	164	1156	11009	103
3	2110	165	1157	11010	107
4	2111	167	1158	11011	111
5	2115	170	1159	11042	114
6	10900	981	1160	11043	116
7	10923	983	2164	11044	120
8	10924	984	2166	11045	121
9	10925	10930	2170	11046	125

O Quadro 4.2 mostra os códigos das estações utilizadas como pontos de controle, cujas coordenadas geodésicas aproximadas são mostradas no Anexo (II). Em cada um dos nove testes realizados, cinco pontos de controle foram retirados do processamento, sendo um ponto em cada sub-área. Para o segundo ensaio descrito na seção 4.8 utilizou-se o mesmo procedimento descrito anteriormente.

#### 4.5d DESENVOLVIMENTO DE ROTINAS

Uma breve descrição das rotinas desenvolvidas em ambiente MATLAB aqui serão apresentadas. Esta apresentação não envolve a descrição dos códigos, mas as tarefas que cada rotina executa, os conteúdos do arquivo de entrada e do arquivo de saída. Os arquivos de entrada e de saída são em formato texto com a extensão “m”, compatíveis com o MATLAB.

Basicamente, quatro são as rotinas que possibilitaram a implementação da metodologia, as quais foram nomeadas como:

- TR7PPAR;
- MODRESID;
- PREDRESID;
- VETORPOS.

O critério de estimação utilizado pelas rotinas TR7PPAR e MODRESID é o Método dos Mínimos Quadrados; o ajustamento é feito pela aplicação do método paramétrico, apresentado no item 3.3.3.

A rotina TR7PPAR é responsável pela estimativa dos sete parâmetros de transformação. Os dados que entram para compor o arquivo de entrada são as coordenadas geodésicas ( $\phi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ) comuns nos dois referenciais. Nesta rotina, os dados do arquivo de saída são:

- Vetor contendo os sete parâmetros de transformação ajustados;
- Vetor contendo, nesta ordem, o valor da forma quadrática dos resíduos, o número de graus de liberdade e a variância à posteriori;
- Matriz covariância dos parâmetros ajustados;
- Matriz correlação dos parâmetros ajustados;
- Vetor contendo os resíduos estimados no ajustamento;

- Matriz contendo as coordenadas cartesianas (X, Y, Z) dos pontos comuns nos dois referenciais.

A estimativa dos coeficientes do polinômio utilizado na modelagem dos resíduos é feita pela rotina MODRESID. Os dados necessários para o arquivo de entrada são os resíduos estimados pela rotina TR7PPAR e as coordenadas cartesianas tridimensionais (X, Y, Z) dos pontos atrelados ao referencial no qual se deseja modelar as distorções. O arquivo de saída é composto por três vetores, os quais representam os coeficientes ajustados de cada superfície polinomial.

A rotina PREDRESID faz a estimativa das correções que devem ser aplicadas às coordenadas transformadas para os pontos de controle. Para o arquivo de entrada, os dados necessários são os coeficientes do polinômio utilizado estimados pela rotina MODRESID e as coordenadas cartesianas dos pontos de controle. É claro que, para estimativa das correções pelo modelo polinomial, as coordenadas dos pontos de controle são àquelas atreladas ao referencial no qual se deseja modelar as distorções. Os valores das correções preditas pelo modelo polinomial são os dados do arquivo de saída.

Além de estimar as coordenadas dos pontos de controle no referencial destino, a rotina VETORPOS faz uma avaliação dos erros obtidos com a metodologia clássica e com a metodologia proposta. O arquivo de entrada é composto pelos parâmetros de transformação estimados com a rotina TR7PPAR, pelas correções estimadas pelo modelo polinomial e pelas coordenadas cartesianas (X, Y, Z) dos pontos de controle comuns nos dois referenciais.

Os dados do arquivo de saída são:

- Coordenadas no referencial destino, usando a metodologia clássica;
- Coordenadas no referencial destino, usando a metodologia proposta;

- Vetor contendo o erro obtido com metodologia clássica;
- Vetor contendo o erro obtido com metodologia proposta;
- Vetor contendo a resultante do erro obtido com metodologia clássica;
- Vetor contendo a resultante do erro obtido com metodologia proposta;

A resultante do erro é obtida por:

$$E = \left( e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.1)$$

onde  $e_x$ ,  $e_y$  e  $e_z$  são os erros para as componentes x, y e z, respectivamente.

#### 4.6 <sup>P</sup>ROCESSAMENTO DOS DADOS

O processamento dos dados foi realizado utilizando-se as rotinas desenvolvidas em ambiente MATLAB, cujas descrições já foram apresentadas na seção 4.5. As fases do processamento seguem àquelas descritas no desenvolvimento das rotinas. O Quadro 4.2, apresentado na seção 4.4, mostra os códigos das estações utilizadas como pontos de controle em cada teste realizado.

Realizaram-se dois ensaios, os quais serão apresentados nas seções 4.7 e 4.8. Em cada ensaio, nove testes foram realizados e em cada um dos nove testes realizados, cinco pontos foram utilizados como pontos de controle que foram retirados do processamento, como já discutido na seção 4.4. A justificativa de um segundo ensaio será evidenciada em ocasião oportuna.

Nesta seção, alguns itens merecem destaque e devem ser elucidados. São eles:

- Variância a priori ( $\sigma_0^2$ );
- Composição da matriz dos pesos (P);

- Graus dos polinômios utilizados (k);
- Análise estatística.

A variância a priori  $\sigma_0^2$  foi tomada como a unidade, isto é,  $\sigma_0^2 = 1$ . No tocante à matriz dos pesos, uma grande dificuldade se repousa na sua composição, visto que no caso focalizado, nenhuma informação necessária à valorização desta matriz foi disponibilizada. Desta maneira, considerou-se todas as observações como não correlacionadas, oferecendo um mesmo grau de confiança com uma variância  $\sigma_i^2$  unitária. Consequentemente, a matriz dos pesos, além de ser diagonal, se degenera na matriz identidade, como pode se verificado pela equação (3.19).

Os modelos polinomiais testados, seguem àqueles das equações (3.81), (3.82) e (3.83), os quais foram apresentados no item 3.4.2 da seção 3.4. Três valores para o grau k foram escolhidos de maneira que foi possível comparar o desempenho de cada polinômio. O Quadro 4.3 mostra os graus dos polinômios testados, onde o número de coeficientes a serem estimados é dado pela equação (3.84).

Quadro 4.3 – Graus dos polinômios e número de coeficientes correspondentes

Grau	Número de Coeficientes
2	6
3	10
4	15

Quanto à análise estatística, esta será melhor elucidada nos itens 4.7.5 e 4.8.4. Cabe aqui ressaltar alguns procedimentos adotados na análise do teste  $\chi^2$ , dado em GEMAEL (1994) por:

$$\chi_c^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \cdot S = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{\sigma_0^2} \quad (4.2)$$



Para aplicação do teste, duas hipóteses são formuladas:

$H_0$  – hipótese básica :  $\sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$

$H_1$  – hipótese alternativa :  $\sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$ .

A hipótese básica  $H_0$  não é rejeitada se :

$$\chi_{1(s;\frac{\alpha}{2})}^2 < \chi_c^2 < \chi_{1(s;1-\frac{\alpha}{2})}^2, \quad (4.3)$$

onde:

$\chi_c^2$  – Qui-Quadrado calculado, baseado na forma quadrática dos resíduos;

$\chi_t^2$  – Qui-Quadrado teórico, baseado na distribuição  $\chi^2$ ;

$\alpha$  – Nível de significância e,

os outros elementos conforme definidos anteriormente.

## 4.7 PRIMEIRO ENSAIO

### 4.7.1 DESCRIÇÃO DE PROCEDIMENTO

O primeiro ensaio foi realizado utilizando-se todas as estações pertencentes à área de estudo, num total de 438 pontos. Primeiramente, procedeu-se a estimativa dos sete parâmetros de transformação entre a “antiga” e a “nova” realização do SGB. Nesta etapa, também foram determinados os sete parâmetros de transformação em cada teste efetuado, observando-se as estações de controle mostradas no Quadro 4.2.

A estimativa das correções para os pontos de controle foi feita seguindo procedimento descrito no item 3.4.2 da seção 3.4. O passo seguinte foi a

estimativa das coordenadas cartesianas em pontos de controle utilizando a equação (3.87), conforme descrição apresentada na seção 3.5.

A análise dos resultados está estruturada numa análise estatística e na comparação dos erros obtidos com a metodologia clássica e a metodologia proposta.

#### 4.7.2 DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS

Com base na transformação de similaridade e na rotina desenvolvida para esta aplicação (TR7PPAR), apresenta-se neste item a parametrização resultante para a área de estudo e para cada teste realizado. Também são apresentados, para a mesma área, os parâmetros estimados sem considerar a ondulação geoidal, isto é, fazendo  $h = H$  na equação (2.1). A matriz correlação é apresentada para o primeiro caso.

Quadro 4.4 – Resultados da parametrização para o primeiro ensaio

Parâmetros	Valores	m
$x_0$ (m)	13.822604	$\pm 1.630530$
$y_0$ (m)	-0.863328	$\pm 1.398742$
$z_0$ (m)	3.561884	$\pm 1.886554$
$\varepsilon_x$ (arcseg)	0.414930	$\pm 0.054308$
$\varepsilon_y$ (arcseg)	-0.481183	$\pm 0.054908$
$\varepsilon_z$ (arcseg)	0.111534	$\pm 0.050974$
$\delta$ (ppm)	-1.136582	$\pm 0.193935$

O Quadro 4.4 mostra a parametrização resultante para todos os pontos da área de estudo e o respectivo erro médio quadrático (m). Os valores dos sete parâmetros de transformação mostram diferenças significativas entre as duas realizações consideradas.

Quadro 4.5 – Matriz correlação do ajustamento para o primeiro ensaio

Parâmetros	$x_0$	$y_0$	$z_0$	$\varepsilon_x$	$\varepsilon_y$	$\varepsilon_z$	$\delta$
$x_0$	1.0000	0.1308	0.3452	-0.2312	-0.6144	0.8003	-0.4347
$y_0$	0.1308	1.0000	-0.1213	0.4399	0.0251	0.6047	0.6254
$z_0$	0.3452	-0.1213	1.0000	-0.8395	-0.7721	0.1928	0.2696
$\varepsilon_x$	-0.2312	0.4399	-0.8395	1.0000	0.4071	-0.0831	-0.0000
$\varepsilon_y$	-0.6144	0.0251	-0.7721	0.4071	1.0000	-0.2724	0.0000
$\varepsilon_z$	0.8003	0.6047	0.1928	-0.0831	-0.2724	1.0000	-0.0000
$\delta$	-0.4347	0.6254	0.2696	-0.0000	0.0000	-0.0000	1.0000

O Quadro 4.5 mostra a matriz correlação para o ajustamento apresentado no Quadro 4.4. As maiores correlações observadas são:

- entre  $\varepsilon_z$  e  $x_0$ , com  $\rho_{16} = 0.8$ ;
- entre  $\varepsilon_x$  e  $z_0$ , com  $\rho_{43} = -0.8$ ;
- entre  $\varepsilon_y$  e  $z_0$ , com  $\rho_{53} = -0.8$ ;

O parâmetro  $\delta$  é relativo à diferença de escala e não exerce nenhuma influência sobre as rotações, de maneira que são quantidades independentes, o que explica os resultados do Quadro 4.5, isto é, possuem correlação nula. A questão da correlação entre parâmetros é muito bem analisada por ANDRADE (1991, p. 28).

Quadro 4.6 – Resultados da parametrização para cada teste do primeiro ensaio

Testes	Parâmetros ajustados						
	$x_0$ (m)	$y_0$ (m)	$z_0$ (m)	$\varepsilon_x$ (seg)	$\varepsilon_y$ (seg)	$\varepsilon_z$ (seg)	$\delta$ (ppm)
1	13.8568	-0.9808	3.4393	0.4120	-0.4742	0.1132	-1.1605
2	13.9097	-0.9264	3.4693	0.4146	-0.4784	0.1137	-1.1574
3	13.9238	-0.8339	3.5076	0.4152	-0.4795	0.1158	-1.1460
4	13.8728	-0.7625	3.5836	0.4165	-0.4826	0.1145	-1.1286
5	13.8332	-0.6465	3.6957	0.4120	-0.4799	0.1182	-1.1051
6	13.9145	-0.8168	3.6653	0.4111	-0.4813	0.1162	-1.1331
7	13.7104	-0.6383	3.7178	0.4125	-0.4797	0.1148	-1.0915
8	13.6993	-0.6242	3.7279	0.4124	-0.4798	0.1147	-1.0883
9	13.7762	-0.7185	3.6277	0.4149	-0.4811	0.1135	-1.1122

Os resultados da parametrização para cada teste realizado, são mostrados no Quadro 4.6. Observa-se variações muito pequenas entre estas parametrizações e àquela obtida no Quadro 4.4.

Quadro 4.7 – Resultados da parametrização do primeiro ensaio sem considerar a ondulação geoidal

Parâmetros	Valores	m
$x_0$ (m)	13.822767	$\pm 1.630530$
$y_0$ (m)	-0.864188	$\pm 1.398742$
$z_0$ (m)	3.563685	$\pm 1.886554$
$\varepsilon_x$ (arcseg)	0.414877	$\pm 0.054308$
$\varepsilon_y$ (arcseg)	-0.481218	$\pm 0.054908$
$\varepsilon_z$ (arcseg)	0.111522	$\pm 0.050974$
$\delta$ (ppm)	-1.136580	$\pm 0.193935$

A parametrização resultante sem considerar a ondulação geoidal é mostrada no Quadro 4.7. Para isto, foi considerado  $N = 0$ , de maneira que a equação (2.1) se simplifica como  $h = H$ . Uma análise entre esta parametrização e àquela obtida no Quadro 4.4 é feita no item 4.7.4.

#### 4.7.3 ESTIMATIVA DAS CORREÇÕES

A rotina necessária para executar esta etapa (PREDRESID) já foi apresentada na seção 4.5. Esta rotina é utilizada em cada teste efetuado estimando as correções que devem ser aplicadas às coordenadas transformadas. O modelo utilizado estimativa das correções é àquele descrito no item 3.4.2 da seção 3.4, isto é, a aplicação das equações (3.81), (3.82) e (3.83). Uma análise dos erros obtidos entre a metodologia clássica e a metodologia proposta é apresentada no item 4.7.5.4.

#### 4.7.4 EFEITO DA ONDULAÇÃO GEOIDAL

A influência da ondulação geoidal  $N$  nos parâmetros de transformação é mostrada no Quadro 4.8. A análise se limita às diferenças obtidas entre a parametrização mostrada no Quadro 4.4 e a mostrada no Quadro 4.7.

Quadro 4.8 – Diferenças entre as parametrizações do primeiro ensaio com a ondulação geoidal e sem a ondulação geoidal

Diferença	Valores $ \Delta $
$\Delta x_0$ (m)	0.000163
$\Delta y_0$ (m)	0.000860
$\Delta z_0$ (m)	0.001800
$\Delta \varepsilon_x$ (arcseg)	0.000053
$\Delta \varepsilon_y$ (arcseg)	0.000035
$\Delta \varepsilon_z$ (arcseg)	0.000012
$\Delta \delta$ (ppm)	0.000002

Pelos resultados apresentados no Quadro 4.8, observa-se uma diferença máxima, em valor absoluto, de 1.8 mm para a translação terciária  $z_0$  e de 0.053 milésimos de segundo para a rotação primária  $\varepsilon_x$ . A escala apresenta uma diferença de 0.002 ppb. Na seção 2.6 foi mostrado como obter a variação nas coordenadas cartesianas em função das coordenadas geodésicas e da ondulação geoidal.

## 4.7.5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

### 4.7.5.1 ANÁLISE ESTATÍSTICA

Nesta análise estatística apresenta-se, além do teste Qui-Quadrado para avaliar a qualidade dos ajustamentos, uma análise do desempenho dos modelos (3.81), (3.82) e (3.83) quanto à modelagem dos resíduos.

O ajustamento mostrado no Quadro 4.4 apresentou, para  $\alpha = 5\%$ , a seguinte estatística:

Quadro 4.9 – Estatística para o Quadro 4.4

Elementos	Valores
$V^T PV$	2052.767
S	1307
$\hat{\sigma}_0^2$	1.571
$\chi_c^2$	2052.767
$\chi_t^2 (1307 ; 0.025)$	1208.670
$\chi_t^2 (1307 ; 0.975)$	1409.088

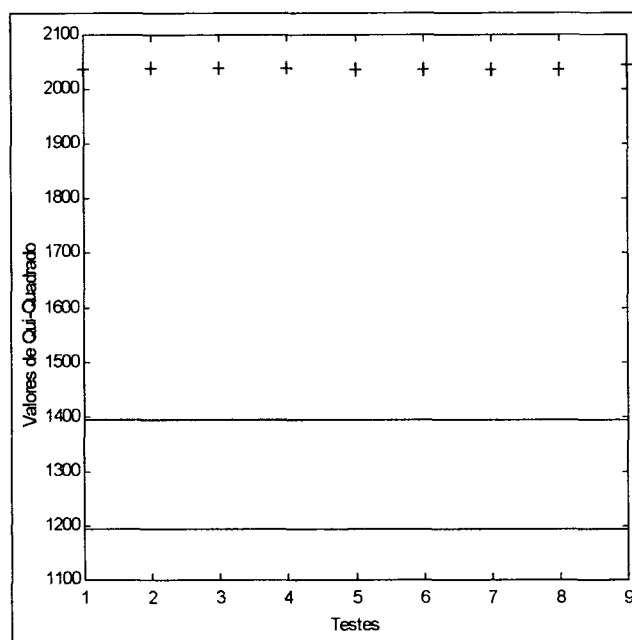
O Quadro 4.9 mostra a estatística para o ajustamento apresentado no Quadro 4.4. Observa-se um valor muito elevado para  $V^T PV$ , resultando em  $\hat{\sigma}_0^2 = 1.571$ . O valor de  $\chi_c^2$  é obtido pela equação (4.2). Pela equação (4.3), a hipótese básica  $H_0$  não é aceita para  $\alpha = 5\%$ .

Quadro 4.10 – Teste Qui-Quadrado para o primeiro ensaio

Testes	$V^T PV$	S	$\hat{\sigma}_0^2$	$\chi_c^2$
1	2035.722	1292	1.576	2035.722
2	2037.852	1292	1.577	2037.852
3	2037.013	1292	1.577	2037.013
4	2037.717	1292	1.577	2037.717
5	2035.435	1292	1.575	2035.435
6	2035.332	1292	1.575	2035.332
7	2034.272	1292	1.575	2034.272
8	2036.146	1292	1.576	2036.146
9	2043.027	1292	1.581	2043.027

A estatística para o ajustamento mostrado no Quadro 4.6 é apresentada no Quadro 4.10. O valor de  $S$  não varia em cada teste, o que fornece os valores de  $\chi^2_{1(1292; 0.025)} = 1194.277$  e  $\chi^2_{1(1292; 0.975)} = 1393.512$ . Os valores de  $\chi^2_c$  são obtidos pela equação (4.2). Também são observados valores de  $V^T PV$  muito elevados.

Gráfico 4.2 – Limites de  $\chi^2_t$  para o primeiro ensaio



Os limites de  $\chi^2_t$  para o primeiro ensaio são mostrados no Gráfico 4.2.

Os valores de  $\chi^2_c$  representados pelo símbolo "+" são obtidos pela equação (4.2).

Pela equação (4.3), observa-se que todos os valores de  $\chi^2_c$  resultaram fora do intervalo, o que já era esperado em função dos valores de  $V^T PV$ . Para todos os testes deste primeiro ensaio, a hipótese básica  $H_0$  não é aceita para  $\alpha = 5\%$ .

Gráfico 4.3 – Desempenho obtido com a modelagem dos resíduos, cujas correções são estimadas por um polinômio de segundo grau – primeiro ensaio.

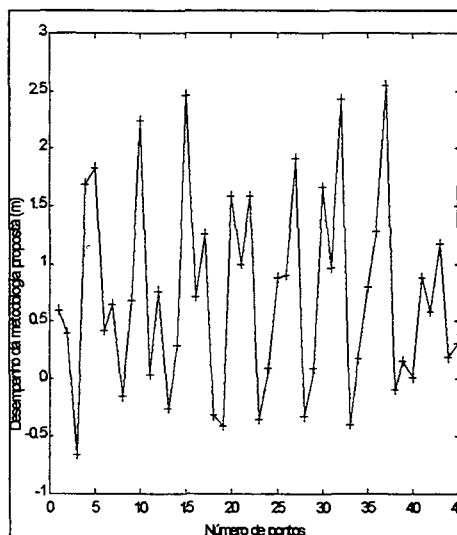


Gráfico 4.4 – Desempenho obtido com a modelagem dos resíduos, cujas correções são estimadas por um polinômio de terceiro grau – primeiro ensaio.

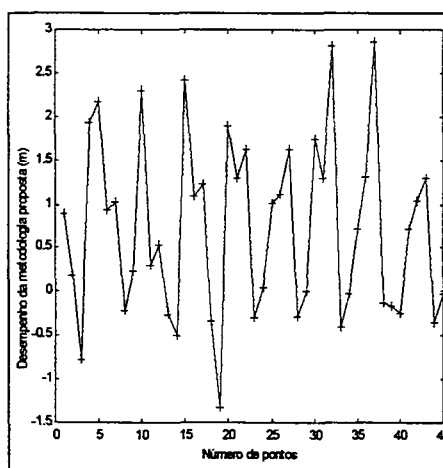
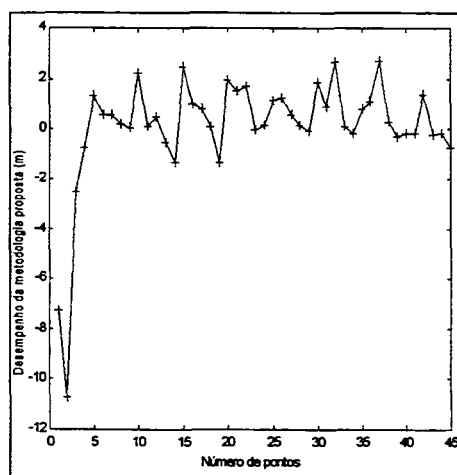


Gráfico 4.5 – Desempenho obtido com a modelagem dos resíduos, cujas correções são estimadas por um polinômio de quarto grau – primeiro ensaio.





Os Gráficos 4.3, 4.4 e 4.5 mostram os desempenhos de cada polinômio estudado, de maneira que a parte positiva dos gráficos refletem quantitativamente a melhoria obtida com a introdução da modelagem dos resíduos. Isto significa que as ordenadas positivas de tais gráficos traduzem o quanto os erros obtidos com a metodologia proposta foram diminuídos em relação à metodologia clássica. Uma análise dos erros obtidos pelas duas metodologias é apresentada no item 4.7.5.4.

Quanto à modelagem dos resíduos, os resultados são resumidos no Quadro 4.11.

Quadro 4.11 – Resultados da modelagem dos resíduos para o primeiro ensaio

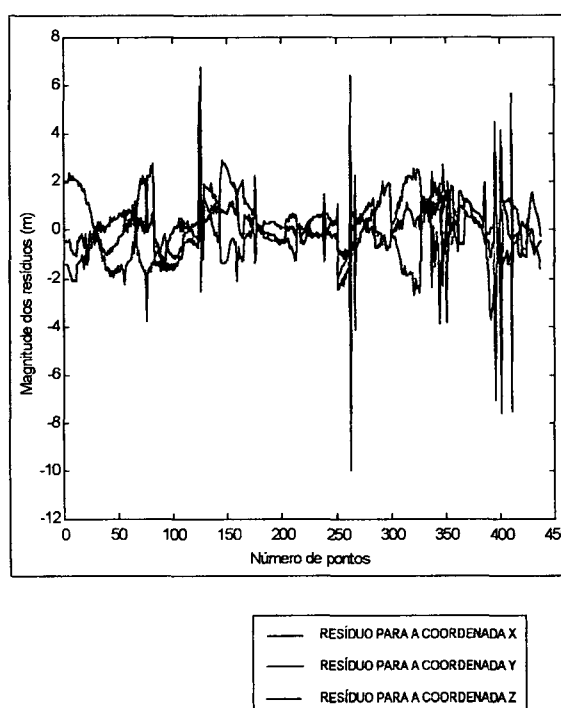
Testes	Grau 4		Grau 3		Grau 2	
	Melhor	Pior	Melhor	Pior	Melhor	pior
1	1	4	4	1	4	1
2	5	0	4	1	4	1
3	3	2	3	2	4	1
4	4	1	3	2	3	2
5	4	1	4	1	4	1
6	4	1	3	2	4	1
7	4	1	3	2	4	1
8	3	2	2	3	4	1
9	1	4	3	2	5	0
Total	29	16	29	16	36	9
%	64.44	35.56	64.44	35.56	80	20

O Quadro 4.11 mostra o comportamento de cada polinômio estudado quando submetido à modelagem dos resíduos. Em cada teste realizado é mostrado quantos valores apresentam resultados melhores ou piores. É observado que, para este primeiro ensaio, o polinômio de grau  $k = 2$ , apresenta um melhor desempenho, chegando a diminuir o erro obtido em 80% dos casos.

#### 4.7.5.2 RESÍDUOS DO AJUSTAMENTO DO PRIMEIRO ENSAIO

O ajustamento efetuado, considerando-se todos os pontos da área de estudo, com o objetivo de estimar parâmetros de transformação entre a “antiga” e a “nova” realização do SGB, foi apresentado no Quadro 4.4. Os resíduos obtidos com aquele ajustamento são mostrados no Gráfico 4.6.

Gráfico 4.6 – Resíduos para as componentes X, Y e Z do primeiro ensaio

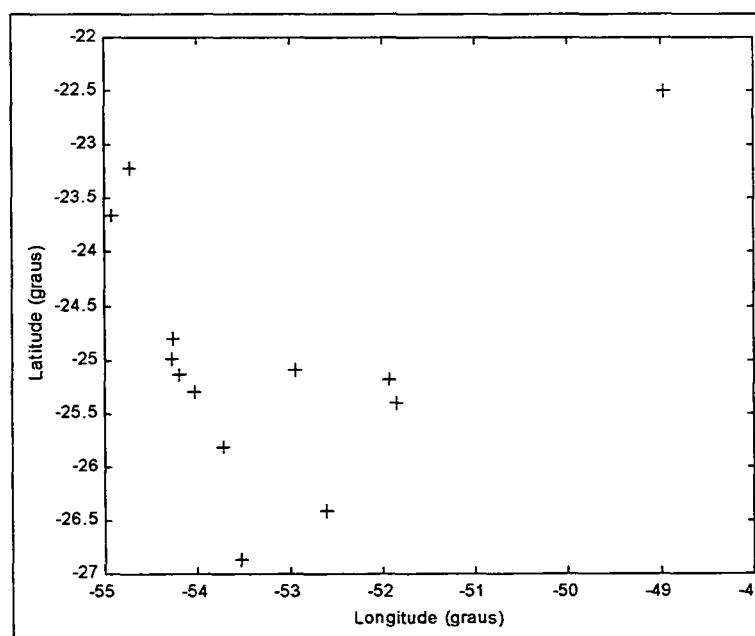


O Gráfico 4.6 mostra os resíduos obtidos para o ajustamento apresentado no Quadro 4.4. Eles são referentes às componentes X, Y e Z do primeiro ensaio. Os Gráficos III.1, III.2 e III.3 do anexo (III) mostram os resíduos para cada componente individualmente. Observa-se valores muito altos para os resíduos em algumas estações, o que contribuiu para o valor elevado de  $V^T_{PV}$ , fato este que será útil para justificar um segundo ensaio. Uma análise visual do Gráfico 4.6 permite verificar que, a magnitude dos resíduos, em torno do seu valor nulo, não ultrapassa a 3 m (em valor absoluto) na maioria dos casos.

#### 4.7.5.3 POSSÍVEIS ESTAÇÕES COM PROBLEMAS

As estações que apresentaram resíduos, em valor absoluto, superiores a 3 m em alguma componente foram analisadas, no sentido de apontar causas prováveis para este fato. A Figura 4.3 mostra a distribuição geográfica das estações consideradas problemáticas.

Figura 4.3 – Situação geográfica dos pontos com resíduos altos



A Figura 4.3 mostra a situação geográfica das estações consideradas problemáticas. Como já comprovado por IBGE (1996), as distorções na rede aumentam à medida que se afasta do vértice origem – Chuá, o que pode justificar uma tendência para sudoeste na situação geográfica das estações, como mostra a Figura 4.3. Estas estações são mostradas no Quadro 4.12.

Quadro 4.12 – Estações com resíduos maiores que 3m em valor absoluto

Número sequencial	Código da estação	Resíduos			$ \Delta h $
		Vx (m)	Vy (m)	Vz (m)	
076	173	1.767	-3.783	1.021	2.941
125	424	5.045	1.020	5.928	0.000
126	425	5.845	6.762	-2.543	0.000
263	2083	6.389	-10.003	-4.437	13.315
267	2087	2.261	-4.113	-2.170	5.900
345	8348	1.929	0.868	-3.898	2.672
351	8366	-0.704	0.184	-3.862	1.940
391	11003	-1.165	-0.110	-3.146	1.560
392	11004	-1.062	0.078	-3.706	1.750
393	11005	-0.593	0.070	-3.242	1.820
396	11008	4.463	-7.093	-6.166	11.021
401	11013	4.142	-7.585	-3.530	10.144
411	11028	5.640	-7.525	-5.905	11.749

O Quadro 4.12 mostra as estações que apresentam resíduos superiores a 3 m em valor absoluto. Observa-se um valor máximo de  $-10.003$  m para a componente  $V_y$  na estação 2083. Observou-se que, com exceção das estações 424 e 425, todas as restantes apresentaram diferenças entre as altitudes da “antiga” e da “nova” realização, como é verificado no Quadro 4.12. A coluna representada por  $|\Delta h|$  significa a diferença entre as altitudes para o mesmo ponto nas duas realizações citadas, onde o valor máximo encontrado foi de 13.315 m para a estação 2083.

Com exceção das estações 2087, 8366, 11003, 11004, 11005 e 11008, todas as restantes já foram apontadas como problemáticas em análise feita por OLIVEIRA (1998).

#### 4.7.5.4 ERROS ORIUNDOS DA PARAMETRIZAÇÃO

A contribuição da modelagem dos resíduos na diminuição dos erros obtidos foi apresentada no item 4.7.5.1. Este item vem consolidar aquele fato, mostrando os erros obtidos com a aplicação da metodologia clássica e da metodologia proposta, sendo que esta última apresenta menores erros. Os Gráficos 4.7, 4.8 e 4.9 mostram os erros obtidos para diferentes graus do modelo polinomial.

Gráfico 4.7 – Erro posicional resultante oriundo da metodologia clássica e da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de segundo grau – primeiro ensaio.

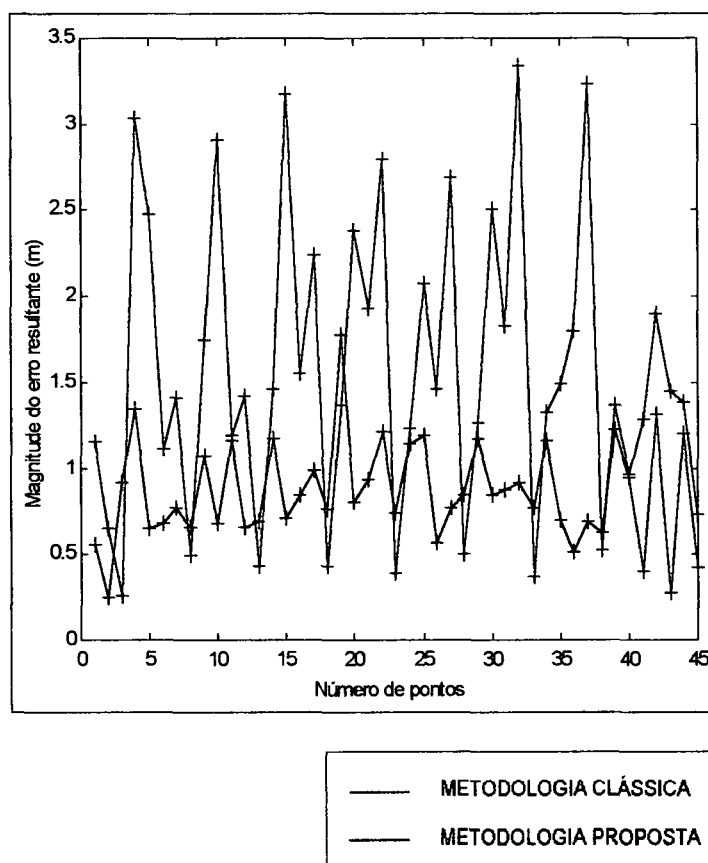


Gráfico 4.8 – Erro posicional resultante oriundo da metodologia clássica e da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de terceiro grau – primeiro ensaio.

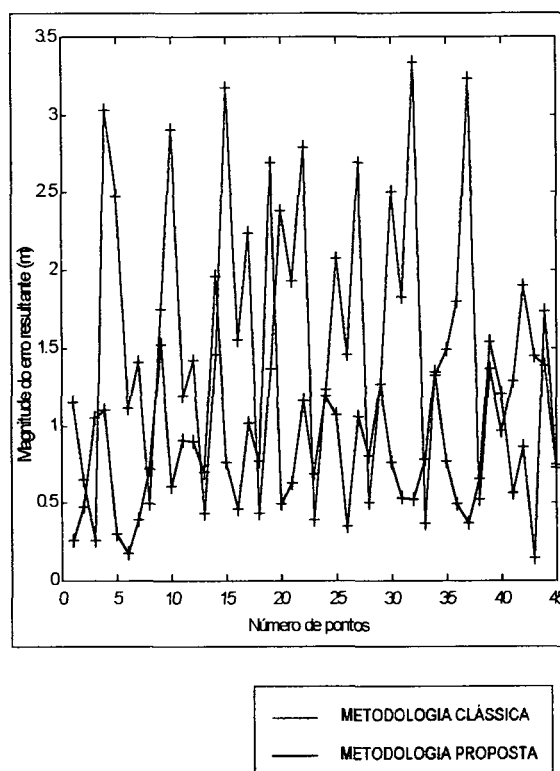
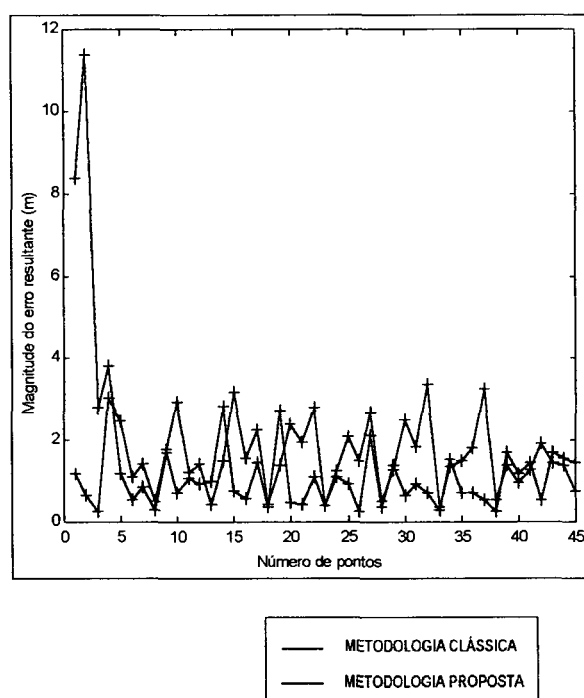


Gráfico 4.9 – Erro posicional resultante oriundo da metodologia clássica e da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de quarto grau – primeiro ensaio.



Os Gráficos 4.7, 4.8 e 4.9 mostram os erros posicionais oriundos da metodologia clássica e da metodologia proposta para cada polinômio estudado. Os Gráficos para cada componente individualmente são mostrados no Anexo (III). Conforme já indicado pelo Quadro 4.11 e pelos Gráficos 4.3, 4.4 e 4.5, o melhor desempenho é obtido com um polinômio de grau  $k = 2$ . Isto também é verificado pelos Gráficos 4.7, 4.8 e 4.9.

## 4.8 SEGUNDO ENSAIO

### 4.8.1 DESCRIÇÃO DE PROCEDIMENTO

Pelas análises apresentadas nos itens 4.7.5.1 e 4.7.5.2, optou-se por realizar um segundo ensaio, retirando-se as estações consideradas problemáticas, as quais foram apresentadas no item 4.7.5.3. Esta alternativa de retirar pontos que apresentam resíduos altos tem sido apresentada na literatura. É o caso das parametrizações entre o WGS-72 e o SAD-69, cuja análise é apresentada por ANDRADE (1984), onde foram eliminados os pontos que apresentaram resíduos altos e um novo ajustamento foi realizado.

Após retirar as 13 estações mostradas no Quadro 4.12, obteve-se um novo conjunto de 425 pontos com os quais procedeu-se um segundo ensaio. Neste segundo ensaio, a sequência da apresentação são as mesmas apresentadas na seção 4.7, exceto àquela do efeito da ondulação geoidal e da análise das estações problemáticas.

#### 4.8.2 DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS

Neste item, apresenta-se as parametrizações para o segundo ensaio e para cada teste realizado. Apresenta-se também a matriz correlação para o primeiro caso. O ajustamento para o segundo ensaio produziu os seguintes resultados:

Quadro 4.13 – Resultados da parametrização para o segundo ensaio

Parâmetros	Valores	m
$X_0$ (m)	6.615196	$\pm 1.697585$
$Y_0$ (m)	-3.653917	$\pm 1.429213$
$Z_0$ (m)	-0.477031	$\pm 1.923954$
$\varepsilon_x$ (arcseg)	0.436917	$\pm 0.055035$
$\varepsilon_y$ (arcseg)	-0.270622	$\pm 0.056594$
$\varepsilon_z$ (arcseg)	-0.082740	$\pm 0.052954$
$\delta$ (ppm)	-1.036342	$\pm 0.198752$

O Quadro 4.13 mostra a parametrização resultante para o segundo ensaio e o respectivo erro médio quadrático (m). Nenhuma conclusão, a priori, pode ser efetuada com relação às rotações ou escala, porém para as translações, observa-se uma diminuição com relação às apresentadas no Quadro 4.4. O Quadro 4.14 mostra a matriz correlação para este ajustamento.

Quadro 4.14 – Matriz correlação do ajustamento para o segundo ensaio

Parâmetros	$X_0$	$Y_0$	$Z_0$	$\varepsilon_x$	$\varepsilon_y$	$\varepsilon_z$	$\delta$
$X_0$	1.0000	0.1447	0.3610	-0.2403	-0.6260	0.8074	-0.4286
$Y_0$	0.1447	1.0000	-0.0950	0.4220	0.0017	0.6076	0.6267
$Z_0$	0.3610	-0.0950	1.0000	-0.8353	-0.7738	0.2190	0.2707
$\varepsilon_x$	-0.2403	0.4220	-0.8353	1.0000	0.4027	-0.1023	-0.0000
$\varepsilon_y$	-0.6260	0.0017	-0.7738	0.4027	1.0000	-0.2969	0.0000
$\varepsilon_z$	0.8074	0.6076	0.2190	-0.1023	-0.2969	1.0000	0.0000
$\delta$	-0.4286	0.6267	0.2707	-0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

O Quadro 4.14 mostra a matriz correlação para o ajustamento apresentado no Quadro 4.13. Observa-se, a menos de poucas diferenças



numéricas, o mesmo comportamento daquela apresentada no Quadro 4.5. O Quadro 4.15 mostra a parametrização para cada teste realizado.

Quadro 4.15 – Resultados da parametrização para cada teste do segundo ensaio

Testes	Parâmetros ajustados						
	$x_0$ (m)	$y_0$ (m)	$Z_0$ (m)	$\varepsilon_x$ (seg)	$\varepsilon_y$ (seg)	$\varepsilon_z$ (Seg)	$\delta$ (ppm)
1	6.5070	-3.8372	-0.6862	0.4343	-0.2593	-0.0851	-1.0599
2	6.5519	-3.7778	-0.6708	0.4375	-0.2632	-0.0848	-1.0565
3	6.5367	-3.6966	-0.6288	0.4378	-0.2639	-0.0834	-1.0435
4	6.4878	-3.6140	-0.5605	0.4396	-0.2671	-0.0846	-1.0256
5	6.4854	-3.4790	-0.4150	0.4345	-0.2654	-0.0796	-1.0012
6	6.5775	-3.6334	-0.4864	0.4349	-0.2664	-0.0812	-1.0312
7	6.3823	-3.4436	-0.4118	0.4359	-0.2653	-0.0822	-0.9876
8	6.3667	-3.4323	-0.4055	0.4359	-0.2652	-0.0824	-0.9846
9	6.4376	-3.5474	-0.4972	0.4378	-0.2666	-0.0842	-1.0096

Os resultados da parametrização para cada teste realizado são mostrados no Quadro 4.15. Observa-se variações muito pequenas entre estas parametrizações e àquela obtida no Quadro 4.13.

#### 4.8.3 ESTIMATIVA DAS CORREÇÕES

Neste item, o procedimento é o mesmo daquele adotado no item 4.7.3. Uma análise dos erros obtidos entre a metodologia clássica e a metodologia proposta é apresentada no item 4.8.4.3.

#### 4.8.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

##### 4.8.4.1 ANÁLISE ESTATÍSTICA

Além do teste Qui-Quadrado para avaliar a qualidade dos ajustamentos, este item apresenta uma análise do desempenho dos modelos (3.81), (3.82) e (3.83) quanto à modelagem dos resíduos.

O ajustamento mostrado no Quadro 4.13 apresentou, para  $\alpha = 5\%$ , a seguinte estatística:

Quadro 4.16 – Estatística para o quadro 4.13

Elementos	Valores
$V^T PV$	1277.574
S	1268
$\hat{\sigma}_0^2$	1.008
$\chi_c^2$	1277.574
$\chi_{11}^2 (1268 ; 0.025)$	1171.206
$\chi_{11}^2 (1268 ; 0.975)$	1368.582

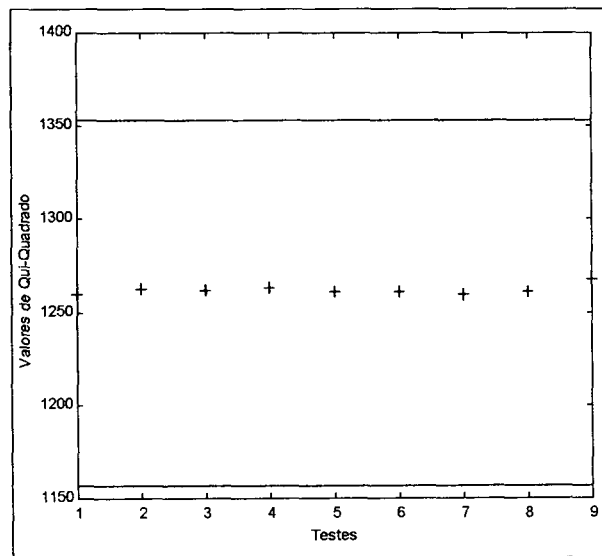
O Quadro 4.16 mostra a estatística para o ajustamento apresentado no Quadro 4.13. Observa-se uma diminuição sensível no valor de  $V^T PV$ , quando comparado com aquele mostrado no Quadro 4.9, resultando em  $\hat{\sigma}_0^2 = 1.008$ . O valor de  $\chi_c^2$  é obtido pela equação (4.2). Pela equação (4.3), a hipótese básica  $H_0$  não é rejeitada para  $\alpha = 5\%$ . O Quadro 4.17 mostra a estatística para o Quadro 4.15.

Quadro 4.17 – Teste Qui-Quadrado para o segundo ensaio

Testes	$V^T PV$	S	$\hat{\sigma}_0^2$	$\chi_c^2$
1	1259.083	1253	1.005	1259.083
2	1262.156	1253	1.007	1262.156
3	1261.803	1253	1.007	1261.803
4	1262.934	1253	1.008	1262.934
5	1260.580	1253	1.006	1260.580
6	1260.385	1253	1.006	1260.385
7	1258.932	1253	1.005	1258.932
8	1260.715	1253	1.006	1260.715
9	1267.509	1253	1.012	1267.509

A estatística para o ajustamento mostrado no Quadro 4.15 é apresentada no Quadro 4.17. O valor de S não varia em cada teste, o que forneceu os valores de  $\chi^2_{1(1253; 0.025)} = 1156.792$  e  $\chi^2_{1(1253; 0.975)} = 1352.996$ . O Gráfico 4.10 elucida a aplicação do teste.

Gráfico 4.10 – Limites de  $\chi^2_1$  para o segundo ensaio



Os limites de  $\chi^2_1$  para o segundo ensaio são mostrados no Gráfico 4.10. Os valores de  $\chi^2_c$  representados pelo símbolo “+” são obtidos pela equação (4.2). Pela equação (4.3), observa-se que todos os valores de  $\chi^2_c$  resultaram dentro do intervalo, o que já era esperado em função dos valores de  $V^T PV$ . Para todos os testes deste segundo ensaio, a hipótese básica  $H_0$  não é rejeitada para  $\alpha = 5\%$ .

Gráfico 4.11 – Desempenho obtido com a modelagem dos resíduos, cujas correções são estimadas por um polinômio de segundo grau – segundo ensaio.

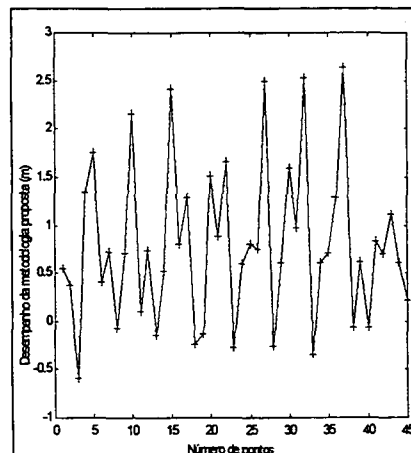


Gráfico 4.12 – Desempenho obtido com a modelagem dos resíduos, cujas correções são estimadas por um polinômio de terceiro grau – segundo ensaio.

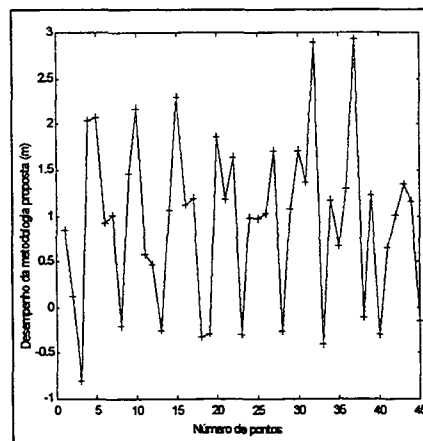
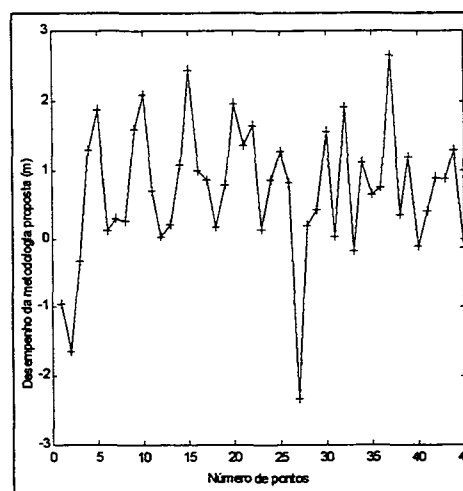


Gráfico 4.13 – Desempenho obtido com a modelagem dos resíduos, cujas correções são estimadas por um polinômio de quarto grau – segundo ensaio.



Os Gráficos 4.11, 4.12 e 4.13 mostram os desempenhos de cada polinômio estudado, de maneira que a parte positiva dos gráficos refletem quantitativamente a melhoria obtida com a introdução da modelagem dos resíduos. Isto significa que as ordenadas positivas de tais gráficos, traduzem o quanto os erros obtidos com a metodologia proposta foram diminuídos em relação à metodologia clássica. Uma análise dos erros obtidos pelas duas metodologias é apresentada no item 4.8.4.3.

Quanto à modelagem dos resíduos, os resultados são resumidos no Quadro 4.18.

Quadro 4.18 – Resultados da modelagem dos resíduos para o segundo ensaio

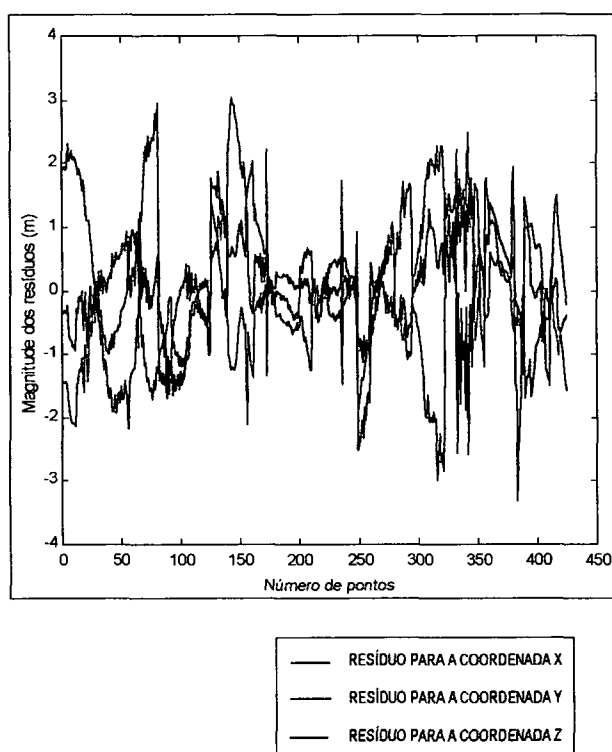
Testes	Grau 4		Grau 3		Grau 2	
	Melhor	Pior	Melhor	Pior	Melhor	Pior
1	2	3	4	1	4	1
2	5	0	4	1	4	1
3	5	0	4	1	4	1
4	5	0	3	2	3	2
5	5	0	4	1	4	1
6	4	1	4	1	4	1
7	4	1	4	1	4	1
8	4	1	3	2	3	2
9	4	1	4	1	5	0
Total	38	7	34	11	35	10
%	84.44	15.56	75.56	24.44	77.78	22.22

O Quadro 4.18 mostra o comportamento de cada polinômio estudado quando submetido à modelagem dos resíduos. Em cada teste realizado é mostrado quantos valores apresentam resultados melhores ou piores. É observado que, para este segundo ensaio, o polinômio de grau  $k = 4$ , apresenta um melhor desempenho, chegando a diminuir o erro obtido em 84.44% dos casos.

#### 4.8.4.2 RESÍDUOS DO AJUSTAMENTO DO SEGUNDO ENSAIO

O ajustamento efetuado, considerando-se os 425 pontos, com o objetivo de estimar parâmetros de transformação entre a “antiga” e a “nova” realização do SGB foi apresentado no Quadro 4.13. Os resíduos obtidos com aquele ajustamento são mostrados no Gráfico 4.14.

Gráfico 4.14 – Resíduos para as componentes X, Y e Z do segundo ensaio.



O Gráfico 4.14 mostra os resíduos obtidos para o ajustamento apresentado no Quadro 4.13. Eles são referentes às componentes X, Y e Z do segundo ensaio. Os Gráficos III.16, III.17 e III.18 do anexo (III) mostram os resíduos para cada componente individualmente. Observa-se uma diminuição nos valores dos resíduos comparado com aqueles apresentados no Gráfico 4.6.

#### 4.8.4.3 ERROS ORIUNDOS DA PARAMETRIZAÇÃO

A contribuição da modelagem dos resíduos na diminuição dos erros obtidos foi apresentada no item 4.8.4.1. Este item vem consolidar aquele fato, mostrando os erros obtidos com a aplicação da metodologia clássica e da metodologia proposta, sendo que esta última apresenta menores erros. Os Gráficos 4.15, 4.16 e 4.17 mostram os erros obtidos para diferentes graus do modelo polinomial.

Gráfico 4.15 – Erro posicional resultante oriundo da metodologia clássica e da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de segundo grau – segundo ensaio.

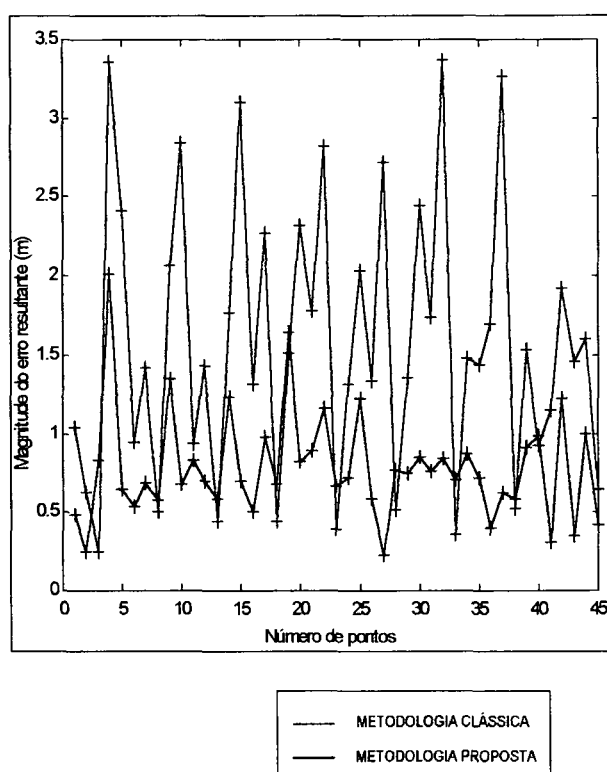


Gráfico 4.16 – Erro posicional resultante oriundo da metodologia clássica e da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de terceiro grau – segundo ensaio.

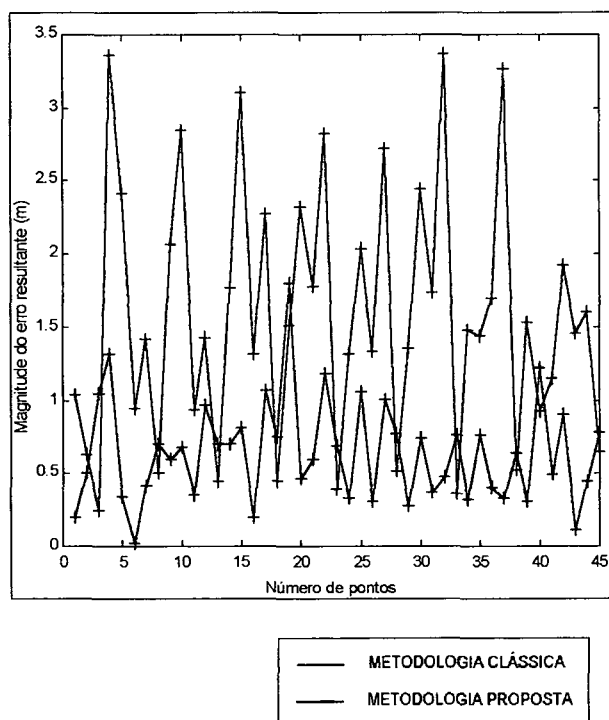
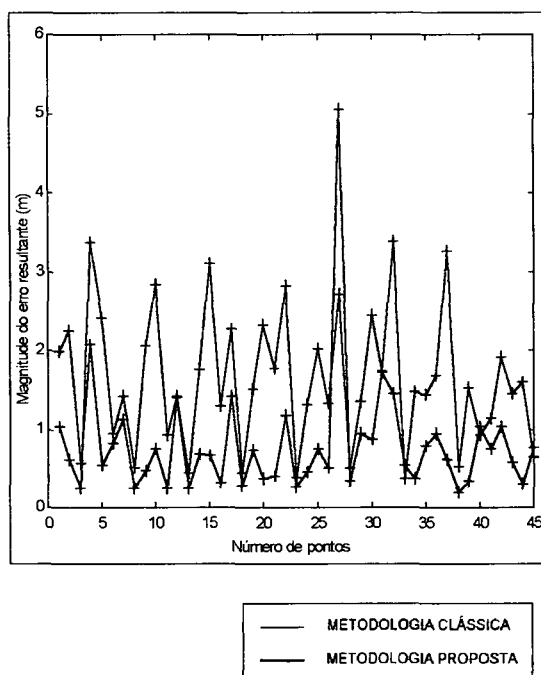


Gráfico 4.17 – Erro posicional resultante oriundo da metodologia clássica e da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de quarto grau – segundo ensaio.





Os Gráficos 4.15, 4.16 e 4.17 mostram os erros posicionais oriundos da metodologia clássica e da metodologia proposta para cada polinômio estudado. Os Gráficos para cada componente individualmente são mostrados no Anexo (III). Como já indicado pelo Quadro 4.18 e pelos Gráficos 4.11, 4.12 e 4.13, o melhor desempenho é obtido com um polinômio de grau  $k = 4$ . Isto também é verificado pelos Gráficos 4.15, 4.16 e 4.17.

## 5. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo, vale ressaltar as principais conclusões obtidas no decorrer do trabalho. Também, recomendações para trabalhos futuros são apresentadas.

As principais conclusões deste trabalho são:

- Os erros obtidos com a introdução da modelagem dos resíduos são menores quando comparados com aqueles obtidos pela metodologia clássica, conforme mostram os Gráficos 4.7, 4.8, 4.9, 4.15, 4.16 e 4.17;
- Os modelos polinomiais se mostraram eficientes quando submetidos à modelagem dos resíduos, conforme análise dos Gráficos 4.3, 4.4, 4.5, 4.11, 4.12 e 4.13;
- Quanto à diminuição dos erros, observou-se melhor resultado para o polinômio de segundo grau no primeiro ensaio e quarto grau no segundo ensaio, conforme mostram os Quadros 4.11 e 4.18;
- Para o segundo ensaio, o polinômio de quarto grau reduziu o erro em 84.4% dos casos, como é analisado no item 4.8.4.1;
- Os valores dos sete parâmetros de transformação apresentados no Quadro 4.4, mostram diferenças significativas entre as duas realizações do SGB consideradas;
- Quanto ao efeito da ondulação geoidal  $N$  na estimativa dos parâmetros de transformação, observou-se uma diferença máxima, em valor absoluto, de 1.8 mm para a translação terciária  $z_0$  e de 0.053 milésimos de segundo para a rotação primária  $\varepsilon_x$ . Nesta análise, a escala apresentou uma diferença de 0.002 ppb;

- Uma conclusão final, fundamentada nas anteriores, é a de que a metodologia proposta se mostrou promissora e pode ser utilizada com vantagens com relação à metodologia clássica.

Fundamentado nas análises deste trabalho, recomenda-se:

- Utilizar modelos polinomiais com graus diferentes daqueles testados neste trabalho e analisar o seu comportamento quando submetido à modelagem dos resíduos;
- Aplicar a metodologia proposta neste trabalho em outras regiões do SGB, considerando as características de extensão continental da rede geodésica brasileira;
- Proceder a um estudo mais detalhado com relação às estações consideradas problemáticas, no sentido de verificar as causas de apresentarem resíduos muito altos com relação às demais;
- Refazer todo o processamento considerando a matriz variância-covariância das observações;
- Utilizar outras metodologias, a exemplo da Colocação por Mínimos Quadrados para a estimativa dos parâmetros de transformação e estimativa das coordenadas em pontos de controle.

# ANEXOS

## **ANEXO I**

**Coordenadas geodésicas aproximadas dos pontos da área de estudo**

## Coordenadas referentes à “nova” realização

Código	$\phi$	$\lambda$	H	N	h
97	S26 53	W49 13	276.3800	2.37	278.7500
98	S26 55	W49 10	497.6600	2.25	499.9100
99	S26 54	W49 03	130.1100	2.03	132.1400
101	S26 54	W49 03	189.8800	2.01	191.8900
102	S26 56	W48 47	350.6600	1.49	352.1500
103	S26 47	W48 55	819.4700	1.83	821.3000
104	S26 48	W48 39	255.4700	1.34	256.8100
105	S26 47	W48 35	236.5600	1.23	237.7900
106	S26 46	W48 40	2.1800	1.38	3.5600
107	S26 46	W48 38	77.5000	1.33	78.8300
108	S26 41	W48 40	16.2800	1.43	17.7100
109	S26 47	W49 11	536.1600	2.36	538.5200
110	S26 46	W49 01	831.3100	2.04	833.3500
111	S26 40	W48 58	339.3900	1.97	341.3600
112	S26 36	W49 10	730.7600	2.38	733.1400
113	S26 36	W49 06	700.6900	2.25	702.9400
114	S26 29	W49 11	547.0500	2.40	549.4500
115	S26 30	W49 02	917.1500	2.09	919.2400
116	S26 31	W48 52	104.1900	1.79	105.9800
117	S26 23	W49 11	1016.4400	2.38	1018.8200
118	S26 22	W49 00	626.3000	2.01	628.3100
119	S26 22	W48 51	29.5000	1.75	31.2500
120	S26 21	W49 04	752.5900	2.13	754.7200
121	S26 12	W49 11	1201.9400	2.32	1204.2600
122	S26 15	W49 00	1110.3100	1.97	1112.2800
123	S26 06	W49 03	1325.3900	2.03	1327.4200
124	S26 01	W49 10	877.8300	2.22	880.0500
125	S26 01	W48 58	1430.6600	1.86	1432.5200
126	S25 56	W49 11	950.9400	2.22	953.1600
127	S25 54	W48 59	1626.7100	1.86	1628.5700
128	S25 50	W49 14	1233.5000	2.29	1235.7900
129	S25 45	W49 05	1305.5000	2.02	1307.5200
130	S25 41	W49 16	942.5400	2.35	944.8900
131	S25 38	W49 06	938.6200	2.07	940.6900
132	S25 29	W49 17	937.2400	2.43	939.6700
133	S25 30	W49 11	896.6600	2.24	898.9000
134	S25 27	W49 03	945.0900	2.08	947.1700
135	S25 15	W49 15	1200.5900	2.54	1203.1300
136	S25 13	W49 05	1041.6100	2.35	1043.9600
137	S25 11	W49 13	1228.2800	2.56	1230.8400
138	S25 05	W49 19	1002.1700	2.78	1004.9500
139	S25 06	W49 08	1317.5900	2.53	1320.1200
140	S24 54	W49 23	683.6300	3.02	686.6500
141	S24 55	W49 13	1203.0700	2.81	1205.8800
142	S24 43	W49 33	1033.3700	3.26	1036.6300
143	S24 42	W49 17	792.0300	3.01	795.0400
144	S24 34	W49 27	1123.6300	3.18	1126.8100
145	S24 32	W49 34	1323.1700	3.26	1326.4300
146	S24 30	W49 25	1171.6400	3.12	1174.7600
147	S24 22	W49 35	1327.4000	3.20	1330.6000
148	S24 19	W49 23	1198.5300	3.00	1201.5300
149	S24 14	W49 26	1157.2200	2.87	1160.0900
150	S24 08	W49 35	977.2900	2.83	980.1200

151	S24 10	W49 24	1016.5100	2.72	1019.2300
152	S24 14	W49 16	1075.3900	2.69	1078.0800
153	S24 07	W49 16	862.5223	2.47	864.9923
154	S24 01	W49 21	831.8100	2.34	834.1500
155	S23 56	W49 36	780.2500	2.34	782.5900
156	S23 52	W49 12	749.0500	1.50	750.5500
157	S23 47	W49 12	773.1500	1.19	774.3400
158	S23 44	W49 27	624.9900	1.38	626.3700
159	S23 35	W49 17	780.2900	0.29	780.5800
160	S23 32	W49 02	801.5500	-0.41	801.1400
161	S23 20	W49 21	867.7400	-0.82	866.9200
162	S23 23	W48 55	738.7100	-1.42	737.2900
163	S23 01	W49 05	811.2400	-3.22	808.0200
164	S23 04	W48 53	868.1800	-3.23	864.9500
165	S22 50	W49 00	718.2400	-4.20	714.0400
166	S22 52	W48 50	797.0000	-4.30	792.7000
167	S22 42	W48 52	714.1700	-4.79	709.3800
168	S22 41	W48 45	694.6900	-4.96	689.7300
169	S22 37	W48 56	745.4300	-4.92	740.5100
170	S22 33	W48 46	630.6900	-5.28	625.4100
171	S22 32	W48 59	714.7900	-5.02	709.7700
172	S22 31	W48 52	640.8200	-5.27	635.5500
173	S22 29	W48 57	667.8188	-5.12	662.6988
174	S22 28	W49 00	705.9400	-5.04	700.9000
175	S22 26	W48 53	618.3400	-5.22	613.1200
176	S22 21	W48 51	604.7900	-5.22	599.5700
177	S22 15	W49 02	631.3900	-4.85	626.5400
178	S22 10	W48 48	554.0800	-5.03	549.0500
179	S22 04	W49 01	567.9700	-4.44	563.5300
382	S25 36	W48 23	1.6900	1.00	2.6900
383	S25 41	W48 28	4.0000	1.05	5.0500
384	S25 31	W48 30	5.4500	1.19	6.6400
385	S25 38	W48 32	5.1900	1.17	6.3600
386	S25 24	W48 37	467.1100	1.47	468.5800
387	S25 32	W48 38	144.6900	1.37	146.0600
388	S25 14	W48 38	748.0300	1.67	749.7000
389	S25 25	W48 46	194.9000	1.65	196.5500
390	S25 14	W48 49	1856.4900	1.94	1858.4300
391	S25 21	W48 54	1457.3300	1.93	1459.2600
392	S25 23	W49 00	1431.6300	2.05	1433.6800
393	S25 13	W49 23	1258.0300	2.75	1260.7800
394	S25 23	W49 33	1147.9100	2.89	1150.8000
395	S25 08	W49 40	928.2700	3.17	931.4400
396	S25 20	W49 45	1147.8100	3.19	1151.0000
397	S25 16	W49 49	1116.4700	3.29	1119.7600
398	S25 12	W49 52	1129.1500	3.35	1132.5000
399	S25 20	W49 53	970.0800	3.36	973.4400
400	S25 09	W49 59	1077.3600	3.50	1080.8600
401	S25 21	W50 01	951.3700	3.52	954.8900
402	S25 08	W50 09	916.3700	3.63	920.0000
403	S25 15	W50 09	928.7400	3.62	932.3600
404	S25 10	W50 19	917.9000	3.75	921.6500
405	S25 21	W50 22	935.0700	3.82	938.8900
406	S25 08	W50 31	960.6500	3.81	964.4600
407	S25 20	W50 28	936.8400	3.86	940.7000
408	S25 08	W50 41	990.4700	3.85	994.3200
409	S25 20	W50 40	995.1900	3.94	999.1300
410	S25 14	W50 46	1055.7000	3.88	1059.5800
411	S25 13	W50 48	1082.2000	3.86	1086.0600
412	S25 25	W50 50	947.9900	4.00	951.9900

413	S25 16	W51 04	1039.4600	3.82	1043.2800
414	S25 24	W51 02	1018.9000	3.97	1022.8700
415	S25 14	W51 13	13.0300	3.72	16.7500
416	S25 23	W51 10	1273.2500	3.89	1277.1400
417	S25 14	W51 22	12.5800	3.64	16.2200
418	S25 24	W51 20	12.6500	3.83	16.4800
419	S25 21	W51 26	1163.8400	3.72	1167.5600
420	S25 15	W51 32	1158.0000	3.52	1161.5200
421	S25 25	W51 34	1047.5900	3.71	1051.3000
422	S25 17	W51 43	1074.8400	3.42	1078.2600
423	S25 24	W51 40	1016.2000	3.61	1019.8100
424	S25 11	W51 55	11.0700	3.21	14.2800
425	S25 24	W51 51	1011.8500	3.49	1015.3400
426	S25 13	W52 09	1132.0200	3.11	1135.1300
427	S25 21	W52 07	907.0800	3.24	910.3200
568	S23 47	W48 05	796.2100	0.39	796.6000
569	S23 37	W48 01	712.4800	-0.23	712.2500
570	S23 41	W48 07	738.7900	0.01	738.8000
571	S23 41	W48 11	738.7800	0.02	738.8000
572	S23 46	W48 15	770.6400	0.36	771.0000
573	S23 42	W48 18	738.2800	0.11	738.3900
574	S23 57	W48 18	700.9600	1.14	702.1000
575	S23 57	W48 24	745.0500	1.20	746.2500
576	S23 49	W48 30	726.8900	0.65	727.5400
577	S24 03	W48 30	867.5200	1.58	869.1000
578	S24 01	W48 44	891.9600	1.71	893.6700
579	S23 47	W48 41	743.2200	0.67	743.8900
580	S23 53	W49 03	791.5900	1.43	793.0200
581	S23 45	W48 50	817.8300	0.58	818.4100
979	S22 05	W48 11	761.5000	-4.63	756.8700
981	S22 08	W48 32	670.3400	-5.04	665.3000
982	S22 04	W49 09	575.7500	-4.22	571.5300
983	S22 11	W49 12	552.5700	-4.38	548.1900
984	S22 07	W49 18	510.4100	-3.94	506.4700
985	S22 01	W49 20	573.0200	-3.64	569.3800
987	S22 01	W49 29	581.1400	-3.23	577.9100
989	S22 01	W49 40	587.2400	-2.67	584.5700
991	S22 01	W49 51	570.2500	-2.06	568.1900
995	S22 00	W50 17	586.5700	-0.58	585.9900
1001	S22 04	W50 20	599.9400	-0.40	599.5400
1002	S22 12	W50 38	550.8800	0.78	551.6600
1003	S22 18	W50 23	574.4000	0.10	574.5000
1005	S22 13	W50 47	567.5000	1.26	568.7600
1006	S22 03	W50 51	502.9400	1.03	503.9700
1007	S22 13	W50 54	543.8300	1.47	545.3000
1008	S22 01	W50 58	481.1220	1.12	482.2420
1009	S22 11	W51 02	556.4600	1.68	558.1400
1011	S22 08	W51 10	497.9300	1.73	499.6600
1013	S22 06	W51 23	483.3200	1.87	485.1900
1015	S22 04	W51 28	494.2700	1.88	496.1500
1017	S22 00	W51 34	485.8500	1.78	487.6300
1136	S22 26	W50 59	476.3400	2.15	478.4900
1137	S22 22	W50 51	510.9600	1.71	512.6700
1138	S22 32	W51 02	488.1300	2.46	490.5900
1139	S22 34	W50 56	484.3600	2.28	486.6400
1140	S22 38	W51 06	490.2900	2.73	493.0200
1141	S22 41	W50 53	416.3200	2.37	418.6900
1142	S22 51	W51 15	512.6400	3.16	515.8000
1143	S22 52	W51 01	432.6100	2.96	435.5700
1144	S22 59	W51 11	623.2300	3.23	626.4600



1145	S23 04	W50 54	440.9400	2.98	443.9200
1146	S22 56	W51 07	586.6400	3.14	589.7800
1147	S23 18	W51 04	569.5758	3.40	572.9758
1148	S23 11	W51 12	671.8600	3.39	675.2500
1149	S23 22	W51 06	585.8500	3.44	589.2900
1150	S23 18	W51 21	745.4300	3.49	748.9200
1151	S23 31	W51 10	717.8100	3.50	721.3100
1153	S23 41	W51 05	811.2300	3.53	814.7600
1154	S23 40	W51 21	845.5900	3.51	849.1000
1155	S23 45	W51 15	906.5400	3.52	910.0600
1156	S23 55	W51 10	1194.0100	3.53	1197.5400
1157	S23 51	W51 01	1147.4400	3.55	1150.9900
1158	S23 59	W51 05	1224.7000	3.55	1228.2500
1159	S23 58	W50 55	1092.7300	3.56	1096.2900
1160	S24 08	W51 02	1002.7100	3.57	1006.2800
1161	S24 04	W50 53	1189.7700	3.59	1193.3600
1162	S24 14	W50 58	897.3600	3.59	900.9500
1163	S24 10	W50 48	902.1000	3.61	905.7100
1164	S24 21	W50 55	1012.3300	3.62	1015.9500
1165	S24 18	W50 47	978.7300	3.65	982.3800
1166	S24 35	W50 51	1091.4500	3.66	1095.1100
1167	S24 26	W50 46	1003.1400	3.67	1006.8100
1168	S24 35	W50 39	1021.3600	3.72	1025.0800
1169	S24 19	W50 31	862.7500	3.66	866.4100
1170	S24 35	W50 28	1043.8600	3.72	1047.5800
1171	S24 23	W50 25	900.3900	3.68	904.0700
1172	S24 30	W50 31	1022.1500	3.71	1025.8600
1173	S24 33	W50 17	1044.5200	3.68	1048.2000
1174	S24 35	W50 21	903.3300	3.72	907.0500
1175	S24 30	W50 20	874.8900	3.69	878.5800
1176	S24 03	W50 38	768.3100	3.56	771.8700
1177	S23 52	W50 38	1062.1600	3.42	1065.5800
1178	S23 56	W50 46	1135.9800	3.53	1139.5100
1179	S23 59	W50 28	1000.3400	3.42	1003.7600
1180	S23 56	W50 23	825.9300	3.30	829.2300
1181	S24 05	W50 21	977.3400	3.46	980.8000
1182	S23 55	W50 10	963.8700	3.02	966.8900
1183	S24 10	W50 01	985.7800	3.29	989.0700
1184	S24 09	W49 47	972.0900	3.08	975.1700
1185	S23 58	W49 48	881.3600	2.69	884.0500
1186	S23 30	W51 25	844.0800	3.52	847.6000
1187	S23 25	W51 25	811.3000	3.51	814.8100
1188	S23 21	W51 29	806.3800	3.48	809.8600
1189	S24 52	W50 41	1099.4300	3.77	1103.2000
1190	S24 50	W50 53	1137.9600	3.69	1141.6500
1191	S25 04	W50 41	941.7600	3.82	945.5800
1192	S25 01	W50 54	976.5500	3.75	980.3000
1193	S25 08	W50 50	949.6900	3.81	953.5000
1194	S25 34	W50 58	1182.6700	4.15	1186.8200
1195	S25 38	W50 45	907.6500	4.21	911.8600
1196	S25 30	W50 55	1010.1600	4.07	1014.2300
1197	S25 43	W50 44	948.8000	4.30	953.1000
1198	S25 43	W50 54	1251.7500	4.34	1256.0900
1199	S25 53	W50 44	1023.7600	4.50	1028.2600
1200	S25 56	W50 56	1184.7000	4.66	1189.3600
1201	S26 02	W50 42	897.3000	4.69	901.9900
1202	S26 02	W50 52	1129.2700	4.78	1134.0500
1203	S26 13	W50 49	858.4100	5.01	863.4200
1204	S26 10	W50 36	835.8900	4.76	840.6500
1205	S26 20	W50 42	1090.6300	5.08	1095.7100

1206	S26 12	W51 00	1017.8200	5.14	1022.9600
1207	S26 19	W50 55	1071.9000	5.26	1077.1600
1208	S26 17	W51 08	1243.6600	5.32	1248.9800
1209	S26 23	W50 59	1300.1800	5.41	1305.5900
1210	S26 24	W51 10	1266.9500	5.52	1272.4700
1211	S26 28	W51 04	1221.2451	5.57	1226.8151
1212	S26 28	W51 08	1209.5400	5.63	1215.1700
1213	S26 33	W51 04	1219.9200	5.69	1225.6100
1214	S26 37	W51 09	1336.3700	5.81	1342.1800
1215	S26 39	W50 59	1191.9500	5.74	1197.6900
1216	S26 43	W51 07	1377.8700	5.91	1383.7800
1217	S26 45	W50 52	1166.0700	5.70	1171.7700
1218	S26 46	W51 03	1134.1200	5.91	1140.0300
1219	S26 42	W50 59	1133.2900	5.79	1139.0800
1220	S26 50	W51 05	1086.9500	5.98	1092.9300
1221	S26 51	W50 54	1159.1700	5.77	1164.9400
1222	S26 54	W51 10	1084.6400	6.08	1090.7200
1223	S26 56	W51 01	1101.1657	5.96	1107.1257
2068	S24 58	W48 02	760.4700	1.29	761.7600
2070	S25 02	W48 08	334.0000	1.31	335.3100
2071	S25 09	W48 04	487.0700	1.07	488.1400
2072	S25 09	W48 10	1071.9700	1.19	1073.1600
2073	S25 16	W48 11	464.4800	1.07	465.5500
2074	S25 08	W48 17	910.8200	1.37	912.1900
2075	S25 23	W48 13	171.8400	0.96	172.8000
2076	S25 15	W48 23	662.4400	1.32	663.7600
2077	S25 25	W48 25	145.4200	1.17	146.5900
2078	S25 24	W48 33	901.5800	1.39	902.9700
2079	S25 21	W48 25	73.5700	1.26	74.8300
2083	S23 12	W54 43	437.2954	6.29	443.5854
2084	S23 15	W54 52	466.0800	6.46	472.5400
2085	S23 24	W54 43	437.2900	6.31	443.6000
2086	S23 27	W54 57	443.1100	6.56	449.6700
2087	S23 39	W54 54	432.8900	6.50	439.3900
2088	S23 39	W54 43	375.1900	6.30	381.4900
2089	S23 28	W54 48	371.9300	6.40	378.3300
2090	S23 32	W54 32	421.5700	6.09	427.6600
2091	S23 26	W54 40	458.0700	6.26	464.3300
2092	S23 38	W54 20	420.7600	5.84	426.6000
2093	S23 21	W54 24	418.5800	5.92	424.5000
2094	S23 28	W54 17	414.6000	5.79	420.3900
2095	S23 19	W54 06	384.1600	5.53	389.6900
2096	S23 34	W54 05	364.1300	5.53	369.6600
2097	S23 16	W53 52	309.6100	5.18	314.7900
2098	S23 36	W53 46	420.9200	5.04	425.9600
2099	S23 26	W54 00	328.8900	5.40	334.2900
2100	S23 33	W53 39	436.2000	4.87	441.0700
2101	S23 20	W53 34	386.7900	4.73	391.5200
2102	S23 31	W53 43	417.8700	4.98	422.8500
2103	S23 21	W53 19	418.6000	4.32	422.9200
2104	S23 34	W53 19	471.1700	4.33	475.5000
2105	S23 25	W53 32	439.9100	4.67	444.5800
2106	S23 05	W54 52	468.8100	6.45	475.2600
2107	S23 08	W54 43	444.9700	6.27	451.2400
2108	S22 52	W54 55	398.4600	6.48	404.9400
2109	S22 58	W54 45	447.5100	6.30	453.8100
2110	S23 01	W54 49	440.6100	6.38	446.9900
2111	S22 42	W54 43	468.9500	6.19	475.1400
2112	S22 36	W54 57	506.2800	6.48	512.7600
2113	S22 34	W54 42	461.4100	6.15	467.5600

2114	S22 37	W54 42	486.5100	6.15	492.6600
2115	S22 14	W54 40	426.8300	6.02	432.8500
2116	S22 11	W54 54	466.4700	6.38	472.8500
2117	S22 04	W54 44	429.2500	6.12	435.3700
2118	S22 00	W54 55	466.8800	6.40	473.2800
2119	S22 00	W54 42	384.1400	6.06	390.2000
2163	S23 58	W50 55	1092.4800	3.56	1096.0400
2164	S23 59	W51 06	1298.3600	3.55	1301.9100
2165	S23 51	W51 01	1146.3900	3.55	1149.9400
2166	S24 00	W51 14	1040.6900	3.50	1044.1900
2167	S23 56	W51 18	987.8500	3.49	991.3400
2168	S24 02	W51 23	812.9500	3.44	816.3900
2169	S23 57	W51 24	810.3900	3.45	813.8400
2170	S24 05	W51 33	582.9500	3.34	586.2900
2171	S23 56	W51 34	665.3700	3.39	668.7600
2172	S24 03	W51 46	569.0300	3.26	572.2900
2173	S23 50	W51 44	596.1800	3.35	599.5300
2174	S23 50	W51 59	381.2900	3.26	384.5500
2175	S23 55	W52 10	575.1500	3.23	578.3800
2176	S24 07	W52 09	703.4100	3.16	706.5700
2177	S23 58	W52 33	624.1700	3.34	627.5100
2178	S24 08	W52 26	716.1837	3.20	719.3837
2179	S23 59	W52 38	613.2500	3.39	616.6400
2180	S24 06	W52 38	627.9400	3.33	631.2700
2181	S24 03	W52 50	540.4200	3.55	543.9700
2182	S24 11	W52 45	636.4900	3.38	639.8700
2183	S24 11	W52 56	544.7700	3.57	548.3400
8083	S24 55	W53 01	734.6800	3.10	737.7800
8085	S24 31	W53 05	514.0700	3.46	517.5300
8086	S24 18	W52 48	602.0900	3.35	605.4400
8087	S24 39	W52 50	570.3100	3.12	573.4300
8088	S24 48	W52 40	615.5700	2.95	618.5200
8089	S24 43	W53 05	603.4400	3.28	606.7200
8091	S24 18	W53 01	520.9600	3.55	524.5100
8092	S23 09	W52 56	371.7000	3.76	375.4600
8093	S22 51	W53 02	472.6400	3.76	476.4000
8094	S23 08	W53 03	362.8200	3.90	366.7200
8097	S23 18	W52 58	402.3700	3.83	406.2000
8098	S22 56	W53 00	486.3400	3.74	490.0800
8099	S23 02	W53 04	420.4900	3.89	424.3800
8100	S22 51	W52 55	482.4100	3.62	486.0300
8101	S23 17	W53 03	373.4500	3.93	377.3800
8102	S22 55	W52 55	487.9200	3.65	491.5700
8104	S23 01	W52 55	464.0900	3.68	467.7700
8105	S24 33	W52 48	613.9800	3.16	617.1400
8328	S23 22	W53 04	447.7400	3.97	451.7100
8329	S23 43	W53 02	487.3900	3.91	491.3000
8330	S24 03	W52 58	505.8200	3.69	509.5100
8335	S23 29	W53 05	464.2600	4.01	468.2700
8342	S23 50	W53 03	470.2000	3.90	474.1000
8347	S23 41	W52 57	519.7800	3.80	523.5800
8348	S25 05	W52 57	907.2685	3.03	910.2985
8350	S25 20	W52 25	1125.0200	3.09	1128.1100
8353	S23 28	W52 56	504.5900	3.82	508.4100
8354	S25 10	W52 43	1005.6700	2.97	1008.6400
8356	S23 37	W52 55	470.3400	3.79	474.1300
8358	S23 22	W52 58	456.6987	3.84	460.5387
8366	S25 07	W54 11	449.8200	4.50	454.3200
8367	S23 49	W52 52	566.8200	3.69	570.5100
8370	S23 37	W53 03	448.8800	3.95	452.8300

10900	S22 46	W53 02	453.0800	3.70	456.7800
10922	S22 00	W53 08	430.4600	3.35	433.8100
10923	S22 08	W53 05	381.2400	3.35	384.5900
10924	S22 16	W53 03	327.2900	3.41	330.7000
10925	S22 33	W53 02	310.1900	3.57	313.7600
10926	S23 36	W53 48	396.2500	5.11	401.3600
10927	S23 46	W53 51	397.4200	5.16	402.5800
10928	S23 53	W53 53	395.5600	5.15	400.7100
10929	S24 05	W54 01	321.9300	5.23	327.1600
10930	S23 06	W48 40	919.8200	-3.23	916.5900
10931	S23 06	W48 30	928.2800	-3.28	925.0000
10932	S23 06	W48 21	1007.6300	-3.22	1004.4100
10933	S23 07	W48 12	570.3500	-3.02	567.3300
10934	S23 06	W48 03	592.9700	-2.87	590.1000
10935	S23 01	W52 54	455.9400	3.67	459.6100
10936	S23 00	W52 43	489.9100	3.46	493.3700
10937	S23 00	W52 29	514.0300	3.31	517.3400
10938	S23 02	W52 16	489.5800	3.26	492.8400
10939	S23 01	W52 08	511.7800	3.26	515.0400
10940	S23 01	W51 54	523.0000	3.30	526.3000
10941	S22 57	W51 39	583.0800	3.32	586.4000
10942	S23 01	W51 25	616.0600	3.37	619.4300
10943	S23 02	W51 10	621.3600	3.26	624.6200
10944	S22 59	W51 02	481.5400	3.10	484.6400
10945	S23 02	W50 48	483.3700	2.77	486.1400
10946	S22 58	W50 38	457.0700	2.23	459.3000
10947	S22 59	W50 21	486.2500	1.34	487.5900
10948	S23 02	W50 05	523.3400	0.43	523.7700
10949	S23 08	W49 50	727.1100	-0.24	726.8700
10950	S23 10	W49 35	842.4500	-1.02	841.4300
10951	S23 09	W49 23	591.6200	-1.75	589.8700
10952	S23 02	W49 14	772.7800	-2.76	770.0200
10953	S22 07	W51 23	551.5100	1.91	553.4200
10954	S22 05	W51 07	491.7300	1.56	493.2900
11000	S24 12	W54 03	352.4100	5.14	357.5500
11001	S24 19	W54 05	412.6000	5.09	417.6900
11002	S24 30	W54 07	480.8500	4.95	485.8000
11003	S24 48	W54 14	421.0900	4.84	425.9300
11004	S24 59	W54 16	341.9200	4.70	346.6200
11005	S25 17	W54 02	549.7900	4.15	553.9400
11006	S25 25	W53 59	357.3800	4.12	361.5000
11007	S25 38	W53 48	407.9000	4.08	411.9800
11008	S25 48	W53 43	502.0088	4.29	506.2988
11009	S26 02	W53 40	827.9800	4.79	832.7700
11010	S26 15	W53 37	854.3800	5.40	859.7800
11011	S26 30	W53 29	777.7400	6.10	783.8400
11012	S26 44	W53 30	708.4600	6.71	715.1700
11013	S26 51	W53 32	581.8058	7.01	588.8158
11019	S24 23	W52 20	798.3300	3.02	801.3500
11020	S24 31	W52 17	891.3700	2.98	894.3500
11021	S24 40	W52 17	747.5000	2.93	750.4300
11022	S24 53	W52 17	874.0700	2.91	876.9800
11023	S25 06	W52 15	876.0600	2.99	879.0500
11024	S25 30	W52 24	912.2000	3.34	915.5400
11025	S25 45	W52 29	714.5400	3.79	718.3300
11026	S25 57	W52 29	842.5100	4.35	846.8600
11027	S26 07	W52 31	768.7700	4.83	773.6000
11028	S26 24	W52 36	970.5014	5.67	976.1714
11029	S26 25	W52 15	1068.5400	5.71	1074.2500
11030	S26 26	W52 01	1130.5100	5.76	1136.2700

11031	S26 27	W51 50	1241.9000	5.82	1247.7200
11032	S26 28	W51 38	1356.3700	5.81	1362.1800
11033	S26 27	W51 25	1288.4300	5.72	1294.1500
11034	S26 34	W52 35	829.5200	6.11	835.6300
11035	S26 50	W52 33	654.7800	6.72	661.5000
11036	S26 57	W52 33	847.8600	6.86	854.7200
11042	S26 21	W52 51	942.0100	5.53	947.5400
11043	S26 18	W52 58	978.0100	5.39	983.4000
11044	S26 17	W53 08	923.3700	5.33	928.7000
11045	S26 17	W53 15	919.7400	5.35	925.0900
11046	S26 17	W53 25	898.2900	5.39	903.6800
11047	S26 23	W50 47	920.9800	5.21	926.1900
11048	S26 23	W50 32	1104.9700	4.95	1109.9200
11049	S26 22	W50 13	868.3900	4.44	872.8300
11050	S26 22	W49 55	991.5600	3.87	995.4300
11051	S26 22	W49 42	980.9600	3.45	984.4100
11052	S26 22	W49 29	967.5500	2.99	970.5400
11060	S26 47	W48 35	235.0900	1.23	236.3200
11061	S26 38	W48 41	48.6800	1.44	50.1200
11062	S26 29	W48 41	105.4900	1.45	106.9400
11063	S26 18	W48 38	152.7400	1.33	154.0700
11064	S26 08	W48 37	124.9600	1.28	126.2400
11065	S25 58	W48 35	6.0900	1.20	7.2900
11066	S25 50	W48 32	104.7400	1.11	105.8500
11067	S25 40	W48 34	90.9900	1.21	92.2000

## **ANEXO II**

**Coordenadas geodésicas aproximadas dos pontos de controle**

## Coordenadas referentes à “nova” realização

Código	$\phi$	$\lambda$	H	N	h
99	S26 54	W49 03	130.1100	2.03	132.1400
103	S26 47	W48 55	819.4700	1.83	821.3000
107	S26 46	W48 38	77.5000	1.33	78.8300
111	S26 40	W48 58	339.3900	1.97	341.3600
114	S26 29	W49 11	547.0500	2.40	549.4500
116	S26 31	W48 52	104.1900	1.79	105.9800
120	S26 21	W49 04	752.5900	2.13	754.7200
121	S26 12	W49 11	1201.9400	2.32	1204.2600
125	S26 01	W48 58	1430.6600	1.86	1432.5200
163	S23 01	W49 05	811.2400	-3.22	808.0200
164	S23 04	W48 53	868.1800	-3.23	864.9500
165	S22 50	W49 00	718.2400	-4.20	714.0400
167	S22 42	W48 52	714.1700	-4.79	709.3800
170	S22 33	W48 46	630.6900	-5.28	625.4100
981	S22 08	W48 32	670.3400	-5.04	665.3000
983	S22 11	W49 12	552.5700	-4.38	548.1900
984	S22 07	W49 18	510.4100	-3.94	506.4700
1155	S23 45	W51 15	906.5400	3.52	910.0600
1156	S23 55	W51 10	1194.0100	3.53	1197.5400
1157	S23 51	W51 01	1147.4400	3.55	1150.9900
1158	S23 59	W51 05	1224.7000	3.55	1228.2500
1159	S23 58	W50 55	1092.7300	3.56	1096.2900
1160	S24 08	W51 02	1002.7100	3.57	1006.2800
2097	S23 16	W53 52	309.6100	5.18	314.7900
2101	S23 20	W53 34	386.7900	4.73	391.5200
2110	S23 01	W54 49	440.6100	6.38	446.9900
2111	S22 42	W54 43	468.9500	6.19	475.1400
2115	S22 14	W54 40	426.8300	6.02	432.8500
2164	S23 59	W51 06	1298.3600	3.55	1301.9100
2166	S24 00	W51 14	1040.6900	3.50	1044.1900
2170	S24 05	W51 33	582.9500	3.34	586.2900
10900	S22 46	W53 02	453.0800	3.70	456.7800
10923	S22 08	W53 05	381.2400	3.35	384.5900
10924	S22 16	W53 03	327.2900	3.41	330.7000
10925	S22 33	W53 02	310.1900	3.57	313.7600
10930	S23 06	W48 40	919.8200	-3.23	916.5900
11006	S25 25	W53 59	357.3800	4.12	361.5000
11009	S26 02	W53 40	827.9800	4.79	832.7700
11010	S26 15	W53 37	854.3800	5.40	859.7800
11011	S26 30	W53 29	777.7400	6.10	783.8400
11042	S26 21	W52 51	942.0100	5.53	947.5400
11043	S26 18	W52 58	978.0100	5.39	983.4000
11044	S26 17	W53 08	923.3700	5.33	928.7000
11045	S26 17	W53 15	919.7400	5.35	925.0900
11046	S26 17	W53 25	898.2900	5.39	903.6800

## **ANEXO III**

**Gráficos de resíduos do ajustamento e erros da parametrização**



Gráfico III.1 – Resíduos para a componente X oriundos do primeiro ensaio.

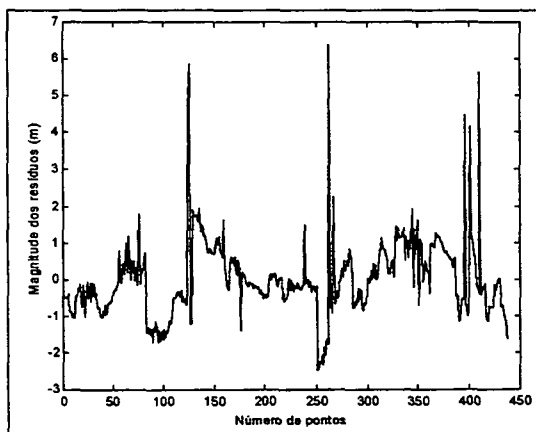


Gráfico III.2 – Resíduos para a componente Y oriundos do primeiro ensaio.

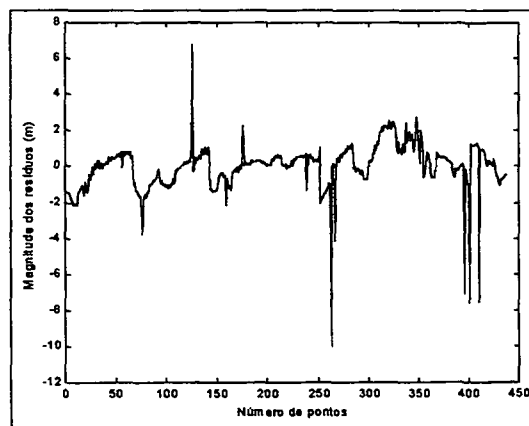


Gráfico III.3 – Resíduos para a componente Z oriundos do primeiro ensaio.

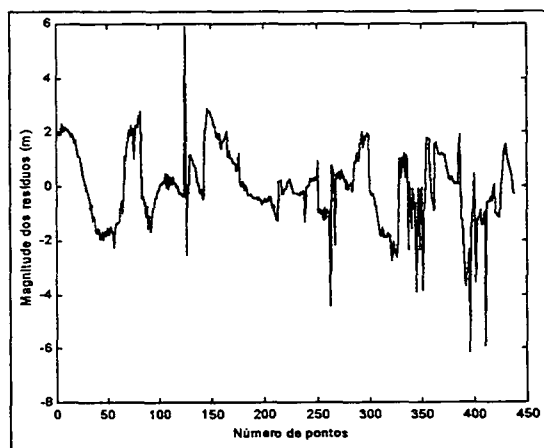


Gráfico III.4 – Erro posicional para a componente X oriundo da metodologia clássica – primeiro ensaio.

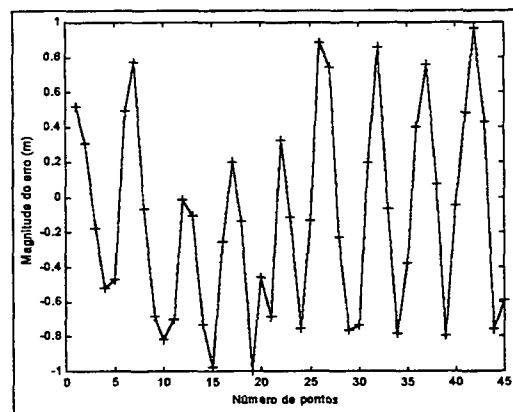


Gráfico III.5 – Erro posicional para a componente Y oriundo da metodologia clássica – primeiro ensaio.

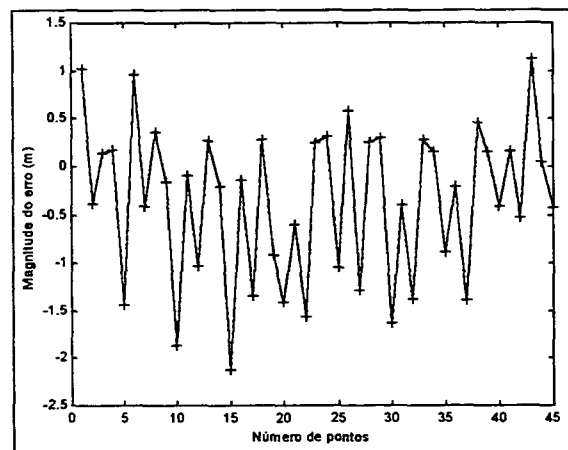


Gráfico III.6 – Erro posicional para a componente Z oriundo da metodologia clássica – primeiro ensaio.

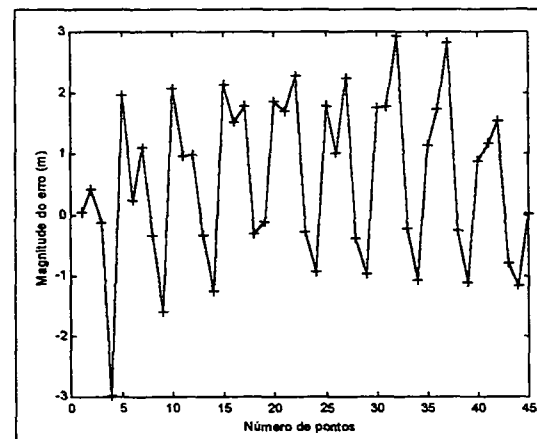


Gráfico III.7 – Erro posicional para a componente X oriundo da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de segundo grau – primeiro ensaio.

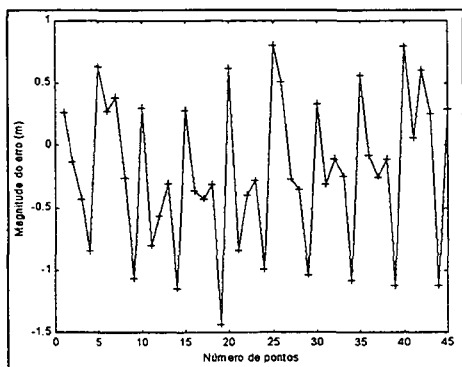


Gráfico III.8 – Erro posicional para a componente Y oriundo da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de segundo grau – primeiro ensaio.

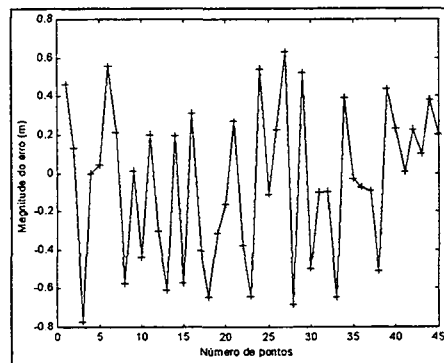


Gráfico III.9 – Erro posicional para a componente Z oriundo da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de segundo grau – primeiro ensaio.

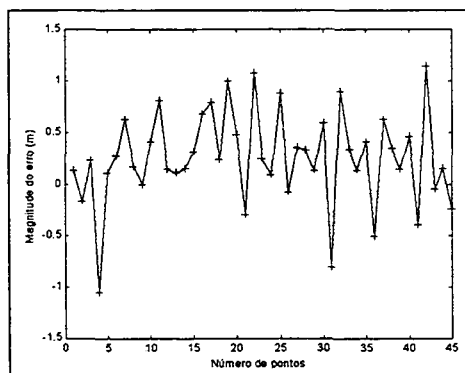


Gráfico III.10 – Erro posicional para a componente X oriundo da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de terceiro grau – primeiro ensaio.

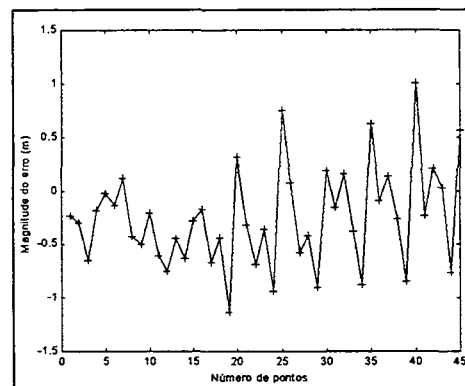


Gráfico III.11 – Erro posicional para a componente Y oriundo da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de terceiro grau – primeiro ensaio.

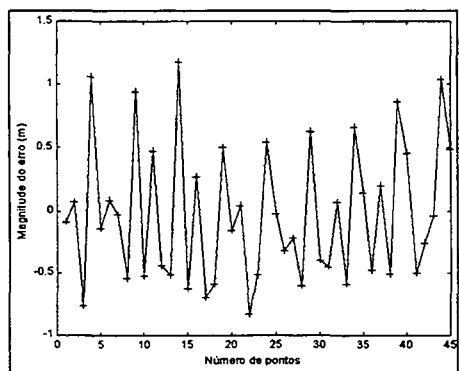


Gráfico III.12 – Erro posicional para a componente Z oriundo da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de terceiro grau – primeiro ensaio.

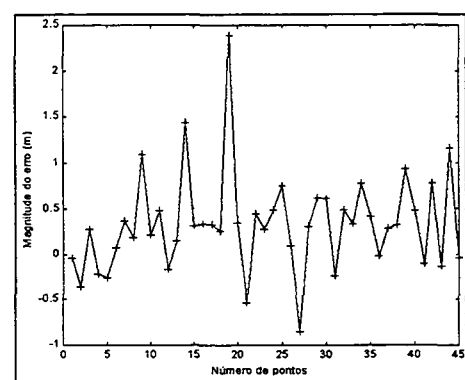


Gráfico III.13 – Erro posicional para a componente X oriundo da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de quarto grau – primeiro ensaio.

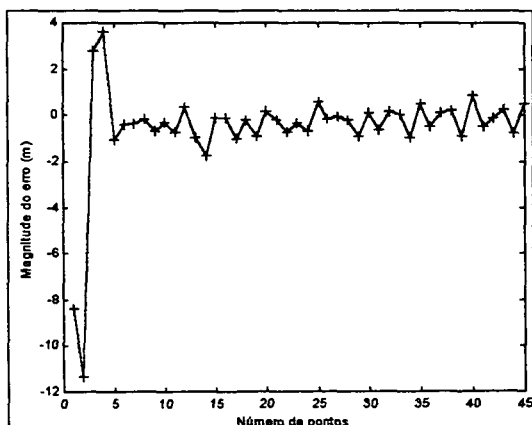


Gráfico III.14 – Erro posicional para a componente Y oriundo da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de quarto grau – primeiro ensaio.

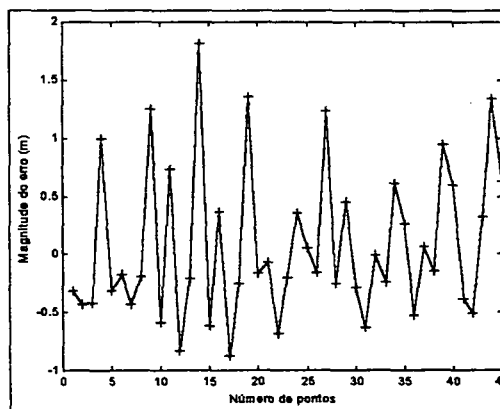


Gráfico III.15 – Erro posicional para a componente Z oriundo da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de quarto grau – primeiro ensaio.

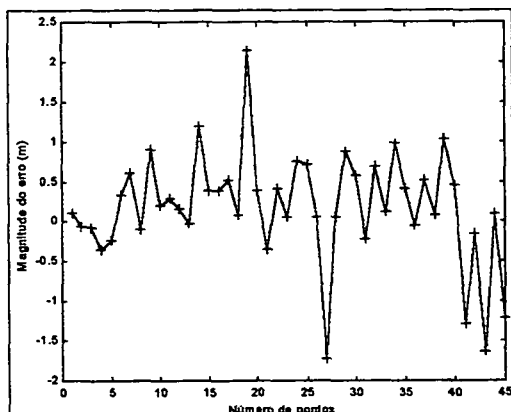


Gráfico III.16 – Resíduos para a componente X oriundos do segundo ensaio.

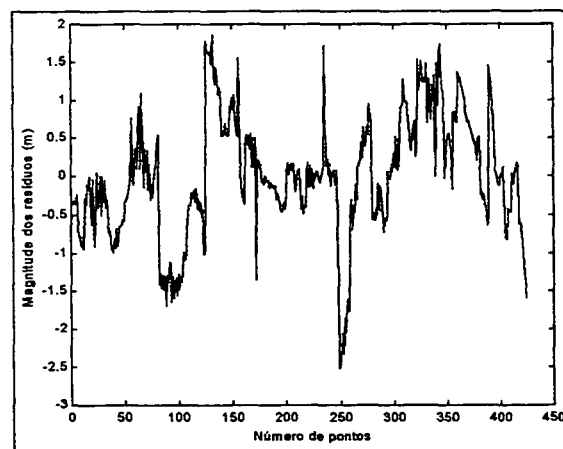


Gráfico III.17 – Resíduos para a componente Y oriundos do segundo ensaio.

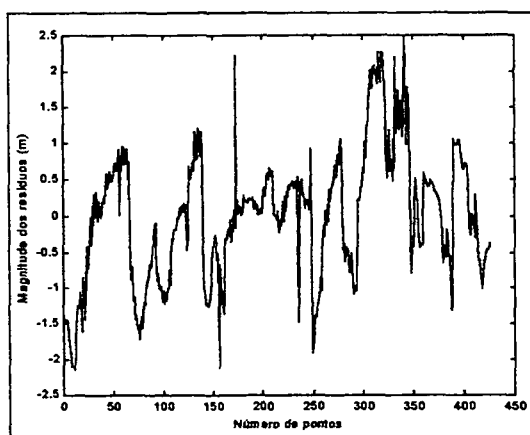


Gráfico III.18 – Resíduos para a componente Z oriundos do segundo ensaio.

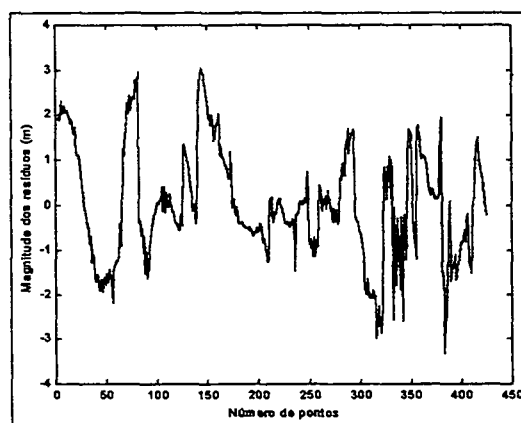


Gráfico III.19 – Erro posicional para a componente X oriundo da metodologia clássica – segundo ensaio.

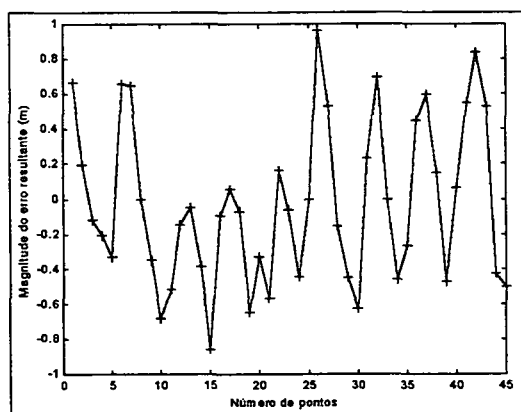


Gráfico III.21 – Erro posicional para a componente Z oriundo da metodologia clássica – segundo ensaio.

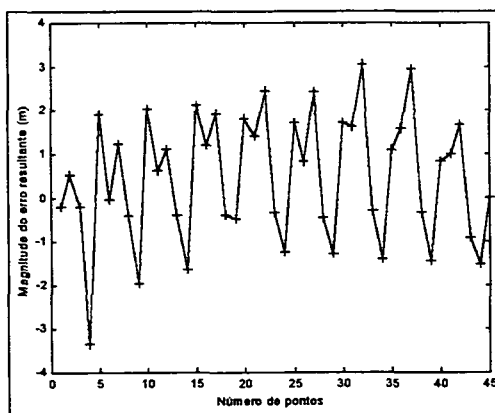


Gráfico III.23 – Erro posicional para a componente Y oriundo da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de segundo grau – segundo ensaio.

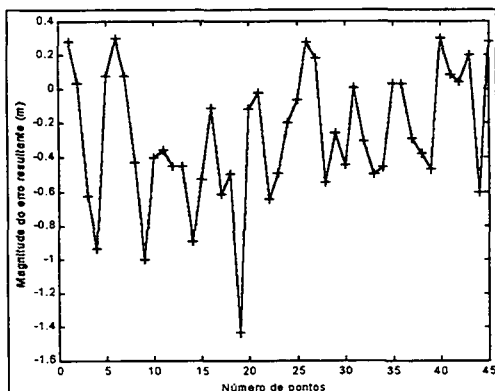


Gráfico III.20 – Erro posicional para a componente Y oriundo da metodologia clássica – segundo ensaio.

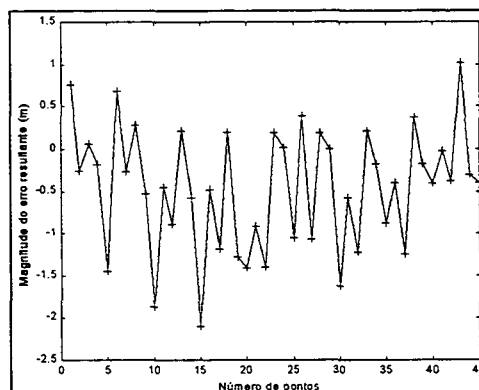


Gráfico III.22 – Erro posicional para a componente X oriundo da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de segundo grau – segundo ensaio.

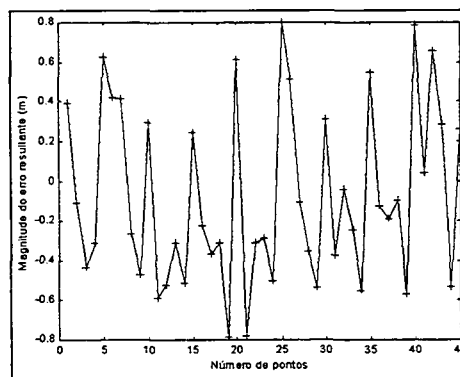


Gráfico III.24 – Erro posicional para a componente Z oriundo da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de segundo grau – segundo ensaio.

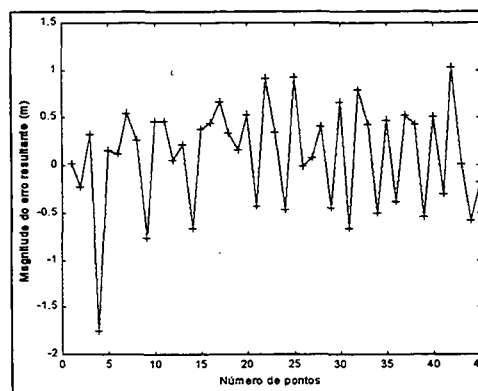


Gráfico III.25 – Erro posicional para a componente X oriundo da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de terceiro grau – segundo ensaio.

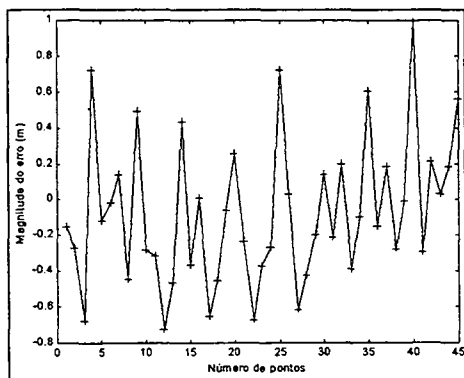


Gráfico III.26 – Erro posicional para a componente Y oriundo da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de terceiro grau – segundo ensaio.

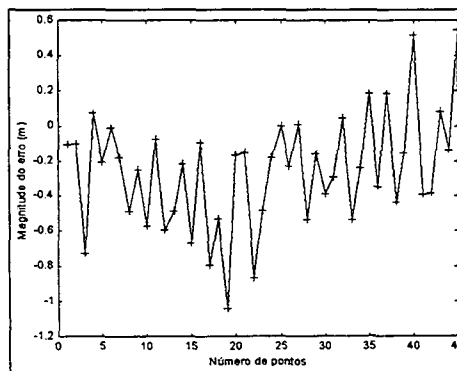


Gráfico III.27 – Erro posicional para a componente Z oriundo da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de terceiro grau – segundo ensaio.

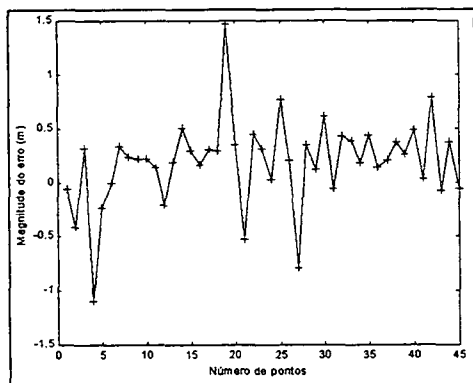


Gráfico III.28 – Erro posicional para a componente X oriundo da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de quarto grau – segundo ensaio.

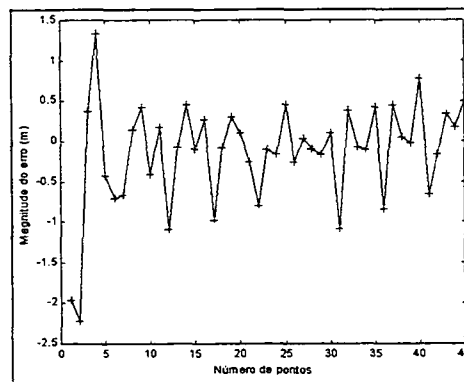


Gráfico III.29 – Erro posicional para a componente Y oriundo da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de quarto grau – segundo ensaio.

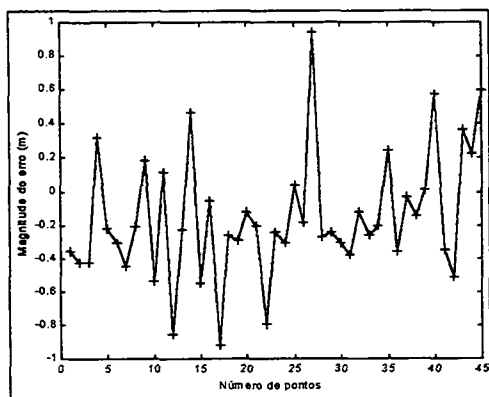
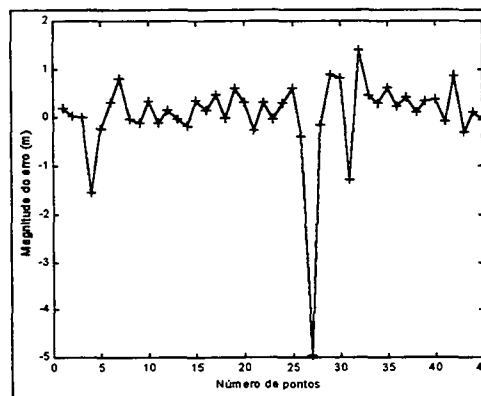


Gráfico III.30 – Erro posicional para a componente Z oriundo da metodologia proposta, cujas correções são estimadas por um polinômio de quarto grau – segundo ensaio.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABD-ELMOTAAL, H. Comparison of polynomial and similarity transformation based datum-shifts for Egypt. *Bulletin Geodesique*, vol. 68, No 3, p. 168-172, 1994.
- ABD-ELMOTAAL, H. e EL-TOKHEY, M. The role of the geoid in the coordinate transformation. *Survey Review*, vol. 34, No 263, p. 31-40, 1997.
- ABIB, O. A. Parâmetros de transformação de Datum WGS-72/SAD-69. *Revista Brasileira de Cartografia*, No 20, p. 32-39, 1978.
- ABOUSALEM, M. ; KRAKIWSKY, E. J. ; BLAIS, J. A. R. e CHAPMAN, M. A. NAD-27 to NAD-83: The Alberta Experience. *Geomatica*, vol. 47, No 1, p. 9-17, 1993.
- ABUSALI, P. A. M. ; SCHUTZ, B. E. ; TAPLEY, B. D. e BEVIS, M. Transformation between SLR/VLBI and WGS-84 reference frames. *Bulletin Geodesique*, vol. 69, No 2, p. 61-72, 1995.
- ANDRADE, J. B. Determinação simultânea de parâmetros de transformação entre referenciais geodésicos e de desníveis geoidais. *Revista Brasileira de Cartografia*, No 37, p. 21-26, 1984.
- ANDRADE, J. B. Transformação NSWG 9Z-2 – SAD-69 e mapa geoidal SAD-69. *Revista Brasileira de Cartografia*, No 44, p. 20-39, 1991.
- BOWRING, B. R. Transformation from spatial to geographical coordinates. *Survey Review*, vol. 23, No 181, p. 323-327, 1976.
- CASTAÑEDA, R. M. Ensaio para definição de parâmetros de transformação entre o SAD-69 e o NSWG-9Z2. Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Dissertação de Mestrado. Curitiba, 1986.

- DE JONGE, P. J. A comparative study of algorithms for reducing the fill-in during Cholesky factorization. *Bulletin Geodesique*, vol. 66, No 3, p. 296-305, 1992.
- DRACUP, J. F. Some notes on adjustments, weights, and accuracies directed to managers. *Surveying and Land Information Systems*, vol. 56, No 1, p. 13-26, 1996.
- FORTES, L. P. S. ; CAGNIN, I. F. ; GODOY, R. A. Z. e BLITZKOW, D. Determinação dos parâmetros de transformação entre os sistemas NWL-10D, NSWG 9Z2, WGS-84 e o SAD-69. Anais do XIV Congresso Brasileiro de Cartografia, p. 157-165. Gramado, 1989.
- GEMAEL, C. Referenciais cartesianos utilizados em Geodésia. Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Curitiba, 1981.
- GEMAEL, C. Geodésia Celeste: Introdução. Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Curitiba, 1991.
- GEMAEL, C. Introdução ao ajustamento de observações: Aplicações geodésicas. 1 ed. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 1994.
- GRAFAREND, E. W. ; MUELLER, I. I. ; PAPO, H. B. ; RICHTER, B. Concepts for Reference Frames in Geodesy and Geodynamics: The reference directions. *Bulletin Geodesique*, vol. 53, p. 195-213, 1979.
- IBGE. Ajustamento da rede planimétrica do Sistema Geodésico Brasileiro. Rio de Janeiro, 1996.
- IERS. Technical Note 21. D. McCarthy, editor. Observatoire de Paris, 1996.

- JUNKINS, D. R. The National transformation for converting between NAD-27 and NAD-83 in Canada. The Canadian Institute of Surveying and Mapping, p. 16-40. Ottawa, 1990.
- JUNKINS, D. R. e ERICKSON, C. Version 2 of the National Transformation Between NAD-27 and NAD-83 and Its Importance for GPS Positioning in Canadá. Geodetic Survey Division Geomatics. Canadá, 1996.
- KADLEC, F. A. e GOMES, J. P. Cálculo de parâmetros de transferências de Sistemas geodésicos. *Revista Brasileira de Cartografia*, No 22, p. 27-34, 1978.
- LAMBECK, K. The relation of some geodetic datums to a global geocentric reference system. *Bulletin Geodesique*, No 99, 1971.
- LANCASTER, P. e SALKAUSKAS, K. Curve and Surface Fitting: an introduction. Department of Mathematics and Statistics. University of Calgary. Academic Press. Canada, 1986.
- LEICK, A. Accuracy Standards for Modern Three-Dimensional Geodetic Networks. *Surveying and Land Information Systems*, vol. 53, No 2, p. 111-116, 1993.
- LEICK, A. GPS Satellite Surveying. 2 ed. Department of Surveying Engineering. University of Maine. John Wiley & Sons, 1995.
- LUGNANI, J. B. Introdução à Fototriangulação. Editora UFPR. Curitiba, 1987.
- MALYS, S. e SLATER, J. A. Maintenance and Enhancement of the World Geodetic System 1984. *Revista Cartográfica*, p. 107-126, 1995.
- MERRY, C. L. e WHITTAL, J. F. Transformation of Coordinate data for the new South African Datum – A Pilot Study. *Survey Review*, vol. 34, No 268, p. 379-388, 1998.



MORITZ, H. Geodetic Reference System 1980. *Bulletin Geodesique*, vol. 54, No 3, 1980.

MUELLER, I. I. Review of Problems Associated with Conventional Geodetic Datums. *The Canadian Surveyor*, vol. 28, No 5, p. 514-523, 1974.

MUELLER, I. I. Reference Coordinate Systems and Frames: Concepts and Realization. *Bulletin Geodesique*, vol. 59, p. 181-188, 1985.

NAKIBOGLU, S. M. ; EREN, K. e SHEDAYED, A. M. Analysis of distortions in the National Geodetic Network of Saudi Arabia. *Bulletin Geodesique*, vol. 68, No 4, p. 220-229, 1994.

NIMA – NATIONAL IMAGERY AND MAPPING AGENCY. Department of Defense – World Geodetic System 1984. Its Definition and Relationships with Local Geodetic System. NIMA TR 8350.2, 3 ed., 4 july 1997.

OLIVEIRA, L. C ; MÔNICO, J. F. G. ; SANTOS, M. C. e BLITZKOW, D. Some considerations related to the new realization of SAD-69 in Brazil. *International Association of Geodesy Symposia*, vol. 118. Rio de Janeiro, 1997.

OLIVEIRA, L. C. Realizações do Sistema Geodésico Brasileiro associadas ao SAD-69 – Uma proposta metodológica de transformação. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Tese de Doutorado. São Paulo, 1998.

PAGGI, G. ; STOPPINI, A. e SURACE, L. Trasformazioni di coordinate nei rilievi GPS. *Bolletino di Geodesia e Scienze Affini*. Firenze, Anno LIII, No 3, p. 285-312, 1994.

PAUL, M. K. A note on computation of geodetic coordinates from geocentric (cartesian) coordinates. *Bulletin Geodesique*, No 108, p. 135-139, 1973.

- RAPP, R. H. Separation between reference surfaces of selected vertical datums. *Bulletin Geodesique*, vol. 69, p. 26-31, 1994.
- RENS, J. e MERRY, C. L. Datum transformation parameters in southern Africa. *Survey Review*, vol. 30, No 236, 1990.
- SANTOS, M. C. Integração GPS/GIS. Sagres Editora. Curso promovido por GIS Brasil, 1997.
- SIDERIS, M. G. Tests of a Gravimetric Geoid in GPS Networks. *Surveying and Land Information Systems*, vol. 53, No 2, p. 94-102, 1993.
- SILLARD, P. e BOUCHER, C. Improvement of the transformation between ITRF and Doppler-Realized WGS-84. *Journal of Geodesy*, vol. 70, p. 768-780, 1996.
- THOMSON, D. B. Combination of Geodetic Networks. Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1976.
- TORGE, W. Geodesy. Walter de Gruyter. Berlin, 1980.
- VANÍCEK, P. e KRAKIWSKY, E. J. Geodesy: The Concepts. 2 ed. North Holland Publishing, 1986.
- VANÍCEK, P. e STEEVES, R. R. Transformation of coordinates between two horizontal geodetic datums. *Journal of Geodesy*, vol. 70, No 11, p. 740-745, 1996.
- VERONEZ, M. R. Proposta de parâmetros de transformação entre os sistemas WGS-84 e o SAD-69 para a região de São Carlos – SP. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. Dissertação de Mestrado. São Paulo, 1998.

VINCENTY, T. Transformation of coordinates between geodetic systems. *Survey Review*, vol. 18, No 137, p. 128-133, 1965.

VINCENTY, T. e BOWRING, B. R. Application of Three-Dimensional Geodesy to Adjustments of Horizontal Networks. National Geodetic Survey. NGS-13, 1978.

WOODEN, W. H. e SMITH, R. W. Geodetic Positioning and Geographic Information Systems. *Revista Cartográfica*, p. 35-44, 1995.